# Diagrammes et Catégories

Franck Jedrzejewski

UNIVERSITE PARIS VII - DENIS DIDEROT

Ecole doctorale : Savoirs scientifiques,
épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

# THÈSE

présentée par

**Franck Jedrzejewski**

en vue d'obtenir le grade de

Docteur de l'Université de PARIS VII

**Spécialité : Philosophie**

# DIAGRAMMES ET CATÉGORIES

Soutenue le 1er décembre 2007 à l'Université Denis Diderot,

devant un jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| M. René GUITART | Université Denis Diderot – Paris VII | Membre du jury |
| M. Etienne KLEIN | Commissariat à l'Energie Atomique | Rapporteur |
| M. Dominique LECOURT | Université Denis Diderot – Paris VII | Directeur de thèse |
| M. Athanase PAPADOPOULOS | Université Louis Pasteur – Strasbourg | Rapporteur |
| M. Jean-Michel SALANSKIS | Université de Paris X – Nanterre | Membre du jury |
| M. Jean-Jacques SZCZECINIARZ | Université Denis Diderot – Paris VII | Membre du jury |

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dominique LECOURT qui a accepté de diriger ce travail. Je garderais longtemps en exemple l'art de la réflexion qu'il a su me communiquer au séminaire, la pertinence de ses remarques, sa grande disponibilité, sa bonne humeur et sa gentillesse. Je voudrais ensuite remercier Etienne KLEIN et Athanase PAPADOPOULOS qui ont accepté de donner leur avis sur ce travail, ainsi que les membres du jury René GUITART, Jean-Michel SALANSKIS et Jean-Jacques SZCZECINIARZ. Un très grand merci à René GUITART et à Jean-Jacques SZCZECINIARZ qui ont relu le texte avec une grande acuité, ont corrigé plusieurs erreurs et ont soulevé de nombreuses questions, toujours pertinentes.

Je remercie Alain BADIOU avec qui j'ai eu une correspondance fructueuse, René GUITART et Vincent GÉRARD pour les documents qu'ils m'ont adressés. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance aux personnes avec qui j'ai eu la joie de collaborer ces dernières années, à mes collègues du CEA et de l'Université. Ils ont su apporter les éclaircissements que je cherchais dans le domaine difficile des sciences physico-mathématiques. J'espère que nous aurons encore de nombreuses occasions de travailler ensemble dans le futur.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des doctorants et des post-doctorants, qui ont rendu très agréables ces trois dernières années du séminaire, à mes proches, famille et amis, pour l'amitié et la sympathie qu'ils m'ont toujours témoignées.

# Prologue

Lorsque Richard Feynman introduit les graphes qui permettront de sortir la physique de l'impasse dans laquelle elle s'était aventurée, d'asseoir l'électrodynamique quantique et d'inaugurer les développements des futures techniques diagrammatiques, lorsqu'Alexandre Grothendieck interroge l'être catégoriel dans l'ordre topologique, alors quelque chose a véritablement changé dans les sciences physiques et mathématiques de l'après-guerre, quelque chose qui s'apparente à une nouvelle topographie et à une renaissance du lieu. Car il s'agit bien du lieu, du *topos* qui porte en germes les forces tensives de cet univers diagrammatique qui relie les mondes par des séries de chaînes et d'écheveaux de fils sans que le sens n'y soit explicitement donné. Or voici que le lieu s'ouvre en abîme, joue des résonances philosophiques et projette les genres et les espèces, les objets et les morphismes, l'acte et la puissance, la matière et l'anti-matière dans une dialectique du topos. Le vocabulaire ne cesse de décomposer et de recomposer des lieux, des régions, des domaines, des champs, des territoires ou des réseaux et tisse une toile où les mots détaillent autant qu'ils monnayent la cartographie générale. Si le pouvoir est inscrit dans la topologie des lieux, le savoir est plus fondamentalement, par delà la complexité des relations et l'entrelacement des devenirs, l'émanation première d'un lieu où s'origine le diagramme.

Ce lieu, c'est d'abord un lieu abstrait, un lieu où se croisent des lignes jetées au cœur de l'édifice et maintenues à bonne distance par leurs forces réciproques, des mots, des intuitions, des concepts, des images et des corps, bref tout un arsenal qui fait fonctionner le diagramme. Pour que le schéma devienne diagramme, il faut, nous essaierons de le démontrer, qu'il se double d'une machinerie qui va puiser d'un côté, ce que le formalisme établit de l'autre. Dans les diagrammes de Feynman, des particules virtuelles remontent le temps et croisent des particules actuelles qui le descendent, expression fossile d'un partage équitable entre matière et anti-matière qui fournit par ce puisement dans le virtuel et la mise en œuvre d'une machinerie faite de règles calibrées et d'expressions mathématiques associées aux points de jonction des nœuds et des lignes d'univers, une formule physique que le calcul traditionnel ne pouvait mener à terme. Là est la force du diagramme, mais aussi son ambiguité. Et dès lors l'espace scientifique n'est plus le lieu de la certitude des objets bien faits, de toute une hiérarchie de propositions que l'on peut atteindre par de simples inférences et des tautologies stériles, mais devient la proie d'une diagrammatique perverse, dont la rigoureuse justification se perd dans les brumes d'une étrange rationnalité. Cette présence du pictural en terre scientifique, cette antériorité du diagramme sur le formel traduisent une prééminence ontologique.

En mathématiques, le diagramme est introduit en théorie des catégories comme un élément du moteur *fonctoriel* qui assure les transferts de signification d'un domaine à un autre. Il reçoit une définition rigoureuse, repère les chemins que l'on peut prendre sans ambages par commutativité et concentre toute la dynamique propre aux mathématiques : plongements, relèvements et recollements. Il n'est pas une représentation de la réalité, c'est pourquoi il n'est pas saturé comme la figure cartésienne par un surplus d'information. Qu'apporterait de plus, se demande Descartes dans la *Sixième méditation*, un schéma du chiliagone ou du myriagone ? Les arêtes ne peuvent pas être représenter avec fidélité et l'information se sature elle-même. C'est parce qu'il mèle l'expérience à l'intuition, qu'il oublie le bourbakisme, que le diagramme pose avec force une imagerie que les mathématiques valideront ensuite. C'est la force du diagramme dit Gilles Châtelet que de savoir esquisser en pointillé une solution. Le diagramme n'est donc pas une simple figure, ni un schéma. C'est un passeur et c'est cela que met en exergue la notion de *fonctorialité*.

Si nous avons choisi comme domaine d'étude les sciences physico-mathématiques, c'est parce qu'il existe une telle réciprocité entre les sciences physiques et les sciences mathématiques qu'on ne peut les séparer. On le voit avec une évidence particulière en théorie des supercordes où les deux domaines s'enrichissent mutuellement. La logique n'a plus la place qu'elle avait autrefois et ce qui condamne tout positivisme est qu'aujourdhui la logique subsume sous le topologique. C'est la grande leçon mathématique des catégories, ou plus précisément des topoi qui sont des catégories particulières. Ce qui compte c'est le lieu, le *topos*. C'est dans ce sens que nous employons *topologique*, comme *science du topos*, entre forme (*morphologie*) et lieu (*locologie*). Car les idéalités mathématiques ne sont pas des fictions. Elles existent là dans la nature, car sinon, par le divers de ses représentants, la communauté scientifique ne pourrait discuter des mêmes objets et des mêmes problèmes, qui *in fine* ne conduisent qu'à un unique *dévoilement de l'Être*. Si la théorie des catégories n'a pas évacué la question des fondements des mathématiques, elle a singulièrement déplacé le problème. Car elle n'a pas besoin des axiomes de la théorie des ensembles pour se constituer. La plupart de ces axiomes sont d'ailleurs, nous le verrons, des propriétés démontrables de certains topoi. Seule la notion d'ensemble est utilisée au sens de collection. On reprend ici la question posée par Alain Badiou sur les catégories qui imposeraient une conception aristotélicienne anti-platonique et qui est justement la question de la concorde entre Aristote et Platon, celle du partage entre l'hénologie et l'ontologie. La question n'est pas la *logique des mondes*, mais leur topologie. Un topos a une logique intuitionniste qui se réduit à une logique classique si le topos est booléen. Le lieu précède le sens. Cette vérité s'étend au-delà des sciences physico-mathématiques. Michel Foucault a montré que le panoptique de Bentham n'a de sens que dans son pouvoir coercitif, qui est inscrit dans sa propre topologie et qu'il généralise à la *microphysique du pouvoir*. C'est encore la topologie qui est au cœur de la pensée de Gilles Deleuze aussi bien dans les méandres psychanalytiques de l'*Anti-Œdipe* que dans les strates du pouvoir de *Mille Plateaux*. Une philosophie qui puisse rendre compte des transformations multiples des mécanismes de pouvoir et des forces tensives de toutes espèces se doit de chercher dans les objets qu'elle considère la place qui leur revient. C'est dans cet espace abstrait où s'accumulent les données de tous ordres que germe le sens profond révélé par l'examen de l'appareil topologique. Lorsque Deleuze évoque le pli chez Leibniz, c'est toujours en résonance multiple, consécutivement aux plissés du baroque et aux plis de la théorie des catastrophes de René Thom. La fronce est le pli majeur. Ce sont de telles considérations topologiques qui font avancer la connaissance. Les plis sont aussi des *singularités* de notre horizon.

La pensée se déploie selon un axe de pénétration, mais aussi dit Gilles Châtelet selon les *offensives du latéral*. Elle est locale et les conditions de passage au global donne à lire plus qu'une simple analogie. La globalisation de la pensée est toujours une condensation du sens. L'analyse fine pose le principe de localisation : *être*, c'est d'abord *être localement*. L'espace dans lequel nous vivons est un espace qui s'épanouit dans le divers des topologies qui peuvent être fort complexes dans l'infiniment petit comme le suggère la théorie des cordes, mais aussi dans l'infiniment grand comme le pense certaines théories cosmologiques. À des échelles différentes mais dans le même sens, Maxwell cherche à comprendre comment un courant électrique en tant que déplacement longitudinal le long d'un conducteur peut donner naissance à un champ magnétique transverse, doué d'un mouvement rotatoire. Il attribue à l'éther le mécanisme de cette transformation. Ce qui importe ici, c'est l'emprise du topologique et le diagramme qu'il sous-tend : curieusement, un phénomène qui se situe sur un axe horizontal induit un autre phénomène qui se place sur un axe vertical. Le latéral est comme le diagonal une question de topologie.

Le diagramme n'est pas la subsomption de la matière à la forme. Ni un mode de détermination. Au contraire, le diagramme incorpore des éléments contingents qui produisent à chaque réalisation un nouveau diagramme. Il faut au pertuis de l'entendement un jugement sûr pour dégager de l'entrelacs de toutes ces figures, le visage de ce qui dans cette machinerie ne cesse d'advenir. Telle est l'aventure diagrammatique qui consiste à ravir le stochastique à l'indifférence du lieu pour le soumettre à notre discernement. Non pas parce que le diagramme règle l'aléatoire, mais parce qu'il enferme le sens et qu'il nécessite parfois toute la force de l'alchimiste pour réaliser la transmutation du signifiant en signifié. A travers lui, l'infini se replie sur la ligne d'horizon, le chaos dessine un univers, et dans ce tohu-bohu, le point de fuite relie les profondeurs du virtuel à la surface de l'entendement. Toute l'image des mathématiques et de la physique se trouve renversée par les techniques diagrammatiques, au profit d'une pensée plus ambiguë et d'une compréhension plus gestuelle qu'intellectuelle.

Les catégories des philosophes ne sont pas celles du mathématicien. En mathématiques, les catégories sont définies comme des collections d'objets et de flèches qui représentent les morphismes, les propriétés, les mouvements et les relations entre ces objets, et vérifient quelques axiomes élémentaires permettant de composer les morphismes entre eux et de réaliser l'identité sur chaque objet. L'objet ne reçoit pas de définition particulière. L'erreur est toutefois de penser que l'objet est aux catégories ce que l'élément est aux ensembles. Car l'élément est indifférencié, alors que l'objet est du fait de son adjonction à des morphismes le représentant de toute une collection d'entités. On parle de la catégorie des groupes, de la catégorie des espaces topologiques ou de la catégorie des ensembles. La puissance universelle de la théorie des catégories réside en cela qu'elle développe une ontologie générale des objets mathématiques dont l'ontologie ensembliste est un cas particulier. Considérer des *collections* de tous les groupes ou de tous les ensembles, c'est se placer au-delà du paradoxe qui soutient que l'ensemble de tous les ensembles n'a pas d'existence, alors que la catégorie des ensembles existe bien en tant que collection de tous les ensembles. Il ne s'agit pas de discuter des fondements des mathématiques, mais plutôt d'interroger l'être mathématique, de s'engager dans la construction d'un lieu de pensée et d'offrir aux bigarrures des univers philosophiques des prescriptions ontologiques qui conduiraient, au-delà du clair-obscur de nos incertitudes, à la lumière originelle.

La notion de *topos* est un cas particulier de la notion de catégorie. Disons que grossièrement un topos est une "bonne" catégorie, non pathologique fermée cartésienne où on démontre qu'il existe des limites et des produits finis, un classificateur de sous-objet et où la notion d'isomorphie coïncide avec la notion ensembliste pour laquelle un morphisme qui est à la fois *mono* et *epi* est un isomorphisme (La bijectivité équivaut alors à l'union de l'injectivité et de la surjectivité). Le topos a un élément initial et un élément final. Il est donc sous-tendu par deux pôles que constituent ces éléments extrêmaux. Sa structure morpho-topologique détermine sa logique. Dans un topos, on a toutes les règles du calcul propositionnel intuitionniste. En général, on n'a pas la loi du tiers exclu (qui reste toutefois vraie pour quelques formules dont celles qui concernent l'identité d'un objet). Mais si le topos est booléen, alors sa logique est classique. Le théorème de Diaconescu affirme même que si l'axiome du choix est vérifié alors le topos est booléen (donc sa logique est classique). Pour un topos quelconque non booléen, il s'ensuit qu'on ne peut pas utiliser les démonstrations par l'absurde (qui repose sur le principe du tiers exclu), ni l'axiome du choix.

Pour autant, les topoi ne sont pas les seuls mondes possibles. Ce qu'ils ont cependant de remarquable est que leur constitution en tant que lieu détermine leur logique immanente. En ce sens, on dira que la logique est subordonnée au topologique (en tant que science des topoi) et la détermine complètement. Une façon parmi d'autres de voir le topologique à l'œuvre est le postulat de Dedekind. Il n'existe pas toujours d'ensemble infini dans un topos, mais s'il existe un et si l'axiome du choix est vérifié, alors l'infini a cette structure bien particulière que l'on connait sous le nom de postulat de Dedekind qui dit que dans tout ensemble infini il existe un sous-ensemble dénombrable. En bref, la dénombrabilité sous-jacente de tout ensemble infini d'un topos contraint la logique du topos à être une logique classique vérifiant le tiers exclu.

La théorie des catégories réussit ce tour de force qui consiste à définir un sous-objet en se passant du concept ensembliste d'inclusion. Dans un topos, le concept de *classificateur de sous-objet* est fondamental. Il contribue à définir ce qu'est un topos et permet de montrer que les sous-objets forment une algèbre de Heyting (la forme algébrique du calcul propositionnel intuitionniste). La complétion d'une telle algèbre est ce que Badiou appelle le *transcendantal d'un monde*. Dans un topos, l'union de deux sous-objets existe toujours et la loi du tiers exclu équivaut à ce que tout sous-objet ait un complément. On en déduit qu'un topos a une logique classique si et seulement si tout sous-objet a un complément. Il suffit donc d'examiner la structure sous-jacente des objets d'un topos (les morphismes de chaque objet vers le classificateur de sous-objet) pour en déterminer sa logique. Ce qui montre de nouveau que la logique est subordonnée au topologique. Ce résultat engage toute la philosophie des topoi.

Si l'opérateur de symétrisation dont parle Gilles Châtelet *parvient à lézarder les diagrammes d'intentionnalité* qui vont du sujet à l'objet et de l'objet au sujet, le *lemme de Yoneda* établit une bijection entre un objet et un ensemble de relations. Plus précisément, il permet de regarder les objets d'une catégorie comme les foncteurs représentables sur cette catégorie, via des transformations naturelles. En termes mathématiques, il énonce que le foncteur de Yoneda est un foncteur pleinement fidèle. Nous verrons au deuxième chapitre que le lemme de Yoneda permet d'interpréter l'objet et le sujet comme les deux faces indissociables d'une même entité, d'un même objet, ses deux composantes duales. Si dans ce lemme, l'actuel est interprété comme la catégorie des ensembles et le virtuel comme l'espace des composantes fonctorielles, alors l'interprétation du plongement de Yoneda devient essentiellement ontologique. L'importance de ce lemme tient à la fois à ses conséquences mathématiques, mais vaut aussi et surtout par ses implications ontologiques.

On ne peut pas séparer les sciences de la philosophie. Parce qu'elles parlent du monde réel, les sciences physico-mathématiques révèlent des dimensions inconnues de l'existence et partant, ouvre une réflexion sur le sens à la vie, nous enseigne la puissance du négatif et nous apprend à construire de nouveaux équilibres. Tributaire des nouvelles découvertes, la philosophie a attribué une place trop importante à la logique et a négligé de considérer les diagrammes et les catégories. Rares sont les philosophes qui se sont aventurés en ces terres partiellement explorées, qui mêlent histoire, sciences et philosophie, mais dont la compréhension est pourtant décisive. Le positionnement de cette réflexion sur les diagrammes et les catégories n'est pas simple car il semble contredire certaines philosophies. En réalité, nous nous attacherons à montrer qu'il n'en est rien, en particulier pour les philosophies de l'immanence.

Une entité mathématique comme celle de groupe ou de corps appartient à plusieurs catégories, par exemple à la catégorie des groupes, mais aussi à la catégorie des ensembles, à la catégorie des corps et à d'autres catégories. En ce sens, il n'y a pas d'unicité catégorielle. Chez Aristote, si on écarte la catégorie de la substance qui est à part, les catégories sont disjointes. Un élément d'une catégorie est exclusivement une qualité, une quantité, un lieu, un temps, une action, une passion ou une autre catégorie. Comme la finalité des catégories est de dire les modalités de l'Être, le raisonnement conduit à une table à vocation taxinomique. Chez Kant, la table des catégories est elle-même homologue à la table des jugements, et ces deux tables déterminent la table des principes. En mathématiques, les catégories n'ont pas de finalité de jugement, ni de vocation classificatoire. Il n'y a pas de listes de catégories, mais seulement une définition qui dit ce que sont les catégories (des collections d'objets et de flèches). Ce qui a pour conséquence, nous essayerons de le montrer, que les catégories mathématiques induisent une ontologie qui n'est pas incompatible avec l'univocité de l'Être. Ce qui ne veut pas dire qu'il y a un seul et même Être, mais que les étants multiples et différents ne sont pas incompatibles avec une approche catégorielle, dans la mesure où elle ne prescrit pas de les classer selon des analogies équivoques ou de les contraindre à une logique classique qui leur serait étrangère. Il ne s'agit pas de dire que l'Être doit se plier à une catégorie, mais de montrer que les prescriptions de la théorie mathématique des catégories pour l'ontologie ne sont pas en contradiction avec l'immanence et l'univocité de l'Être. Nous ne souhaitons pas un retour de l'*onto-(théo)-logie*, car les problèmes de celle-ci vont bien au-delà du domaine que nous nous sommes assigné. Nous souhaiterions plutôt croiser ontologie et topologie en une *onto-(po)-logie*, comme science de l'Être en tant qu'être physico-mathématique. Pour montrer que les catégories mathématiques et l'approche scientifique posent des prescriptions ontologiques qui ne sont pas incompatibles avec l'univocité de l'Être, il faudra engager l'étude des procédés qui les circonscrivent. Nous en avons retenu quatre qui composent ce que nous appelons le *quadrilatère épistémique* : la virtualité, la fonctorialité, l'universalité et la dualité. En somme, il s'agit d'interroger l'*épistémè* des sciences physico-mathématiques de la deuxième moitié du XXe siècle. Voilà l'outil et la méthode.

1. La *virtualité* est le territoire des diagrammes et des catégories. Lorsqu'en 1949, Feynman dessine son premier diagramme, il représente des particules actuelles et des particules virtuelles. Peu après, Grothendieck travaille avec des nombres de Betti virtuels et esquisse la notion de motifs virtuels. Dans un même mouvement, physique et mathématiques convoquent la virtualité à l'horizon d'un même univers, car il y a dit Châtelet *une homologie rationnelle entre la provocation du « réel » mathématique et la provocation « expérimentale » de la physique.* Lorsque le physicien construit un collisionneur de particules, lance une particule contre sa jumelle pour voir dans une gerbe de milliers d'événements la structure profonde de la matière, sonder ses composants ultimes, c'est avant tout pour provoquer des apparitions, faire émerger d'autres composants, actualiser des choses. C'est tout l'enjeu des virtualités que de *donner à naître.* Leibniz veut faire vivre les points, les voir comme des « possibilités », ce que nous appelons aujourd'hui des virtualités. La virtualité des points singuliers démange, dit Châtelet, c'est pourquoi il faut gratter ces singularités pour exprimer la puissance des choses. C'est Leibniz qui a vu l'enjeu d'une physique des mathématiques en plaçant le virtuel entre l'acte et la puissance d'Aristote.

Pour que le diagramme fonctionne, qu'il soit différent d'un simple schéma, il faut qu'il révèle le sens de ces singularités. C'est pourquoi le diagramme est toujours à l'interface de l'actuel et du virtuel. Il assure le passage de l'un à l'autre par une machinerie qui est l'âme du diagramme. Cette machinerie n'est pas là pour représenter des objets, mais pour produire, dans le réel, une actualisation de ses composantes virtuelles, révéler au monde sensible, une face dissimulée de l'objet. Actuel et virtuel compose la réalité du monde. Quand le physicien évoque le *principe des travaux virtuels*, il ne s'agit pas de mondes chimériques, mais bien du monde dans lequel nous vivons. Comprendre ce qu'est une particule et une anti-particule, c'est se placer au point où s'enchevêtrent dans la *création* de ces deux objets, le devenir de chaque particule et dans l'*annihilation* les territoires que chacune délimite. Si un couple électron-positron prend naissance, c'est comme actualisation de la virtualité du vide quantique. Le virtuel est une composante du réel.

On soulignera l'importance de l'horizon dans les expressions diagrammatiques, lieu où tout s'assemble comme pour mieux se mêler, s'interpénétrer ou se fondre, et en fonction de quoi se déploie le geste inaugural de la connaissance. L'horizon, c'est le repli de l'infini dans l'actuel. L'image du microscope qui se forme à l'infini. Car l'image virtuelle n'a d'existence dans le monde physique qu'à travers un dispositif expérimental, auquel elle préexistait. Comme l'infini est au-delà de notre univers, il faut une machine abstraite qui le rabatte sur l'actuel pour que nous puissions le voir et le comprendre dans le monde sensible. Cette machine est justement l'expression du virtuel. Comme nous l'avons vu à propos du théorème de Diaconescu, la structure topologique de l'infini est importante pour déterminer la logique canonique ou immanente du lieu, il en résulte que les virtualités ne sont pas sans influence dans la détermination de la logique qui émane d'un territoire. Les singularités sont de puissants enjeux dans notre compréhension du monde. On ne peut assigner l'image du microscope à un point du monde physique. Pour autant, cette image n'est pas indiscernable. Le virtuel n'introduit pas de confusion, même si parfois il nous ramène en un point où tout semble se superposer. C'est au travers de cette superposition que le relèvement opère. Comment peut-on voir une image qui se forme à l'infini, en un lieu que l'on ne peut atteindre, et pourtant, que nos yeux discernent parfaitement ? C'est cela l'idée des diagrammes comme *enchantement du virtuel*. C'est la même idée que de relier des points du monde sensible à l'infini qui prélude à la genèse des variétés riemanniennes. L'indiscernabilité existe dans la nature (indiscernabilité des particules), et ce n'est pas ajouter de la confusion que de se placer au voisinage de ces singularités, aux points d'inflexion où la topologie s'incurve pour produire de nouveaux effets. Car il n'y a pas d'autres choix : c'est le seul passage où cela se produit, que l'on appelle cela actualisation du virtuel ou non.

Les catégories d'Aristote ne laissent aucune place au virtuel. Comme l'a bien vu la scolastique médiévale, elles s'organisent en cercle autour de la catégorie de la substance, qui englouit une bonne partie du problème des modalités de l'Être. Entre deux catégories, on peut plus ou moins facilement en construire une troisième. Par exemple, l'intensité est ce qui se situe exactement entre les catégories de la qualité et de la quantité. Comme elle se place sur une surface qui délimite un intérieur d'un extérieur, on distingue l'*intensité* qui est tournée vers l'intérieur, de l'*extensité* qui elle, est tournée vers l'extérieur. C'est cela la puissance aristotélicienne, la singularisation première de la substantialité qui pousse les cercles à se développer comme une onde à la surface de l'étang. L'actuel est pensé comme multiple. Chez Platon, il n'y a qu'un type d'Être : l'Idée, que Badiou assimile à la notion mathématique d'ensemble. Il va même plus loin et pose que l'opposition de la théorie des ensembles à la théorie des catégories est *une actualisation contemporaine de l'opposition* entre

Platon et Aristote et examine trois déterminations différentielles (*une théorie localisée de la différence, l'unicité du vide et l'indécidabilité*). Ce qui nous ramène à la question du vide. Pour Badiou, la hiérarchie cumultative des ensembles est suturé à l'Être par le nom du vide. En théorie des ensembles, le nom primitif de l'Être est l'unique ensemble vide ; en théorie des topoi, le vide est pluralisé. Le vide est aussi un élément important de la diagrammatique feynmanienne.

2. La *fonctorialité* est un concept essentiel de la théorie des catégories qui réalise le transfert d'information entre catégories. Le foncteur est plus qu'une fonction, car il porte sur des éléments disparates, des objets et des morphismes et conserve les règles d'agencement des catégories, identité et composition de morphismes. On le retrouve entre les diagrammes et il est à l'origine d'une définition mathématique de ce que sont les objets et les propriétés universelles. Il donne une vision panoramique qui en fait un redoutable instrument d'investigation. Enfin, il est au centre de questions lourdes de conséquences : la représentabilité des foncteurs et leur adjonction.

Le foncteur, c'est d'abord ce qui permet de passer d'un territoire à un autre. En ce sens, le diagramme est un foncteur puisqu'il réalise le passage du virtuel à l'actuel. Affirmer que le virtuel est l'Être de l'étant conduit à faire du virtuel un fourre-tout de tout ce qui pourrait arriver, qui fait et défait, libère des différences que recueille l'actuel. En somme, il s'agit de faire de l'actualisation un foncteur temporel, une transformation entre le potentiel et l'actuel, dans laquelle il ne peut plus exister de vérités hors-temps. Le temps serait le nœud de l'affaire qui plierait ce que le virtuel actualise. La forme actuelle serait le fruit du virtuel et la vérité de toute forme actuelle serait inconcevable. Seul le virtuel manipulerait du vrai qu'il distillerait au gré des actualisations. Bref, ce foncteur partagerait un virtuel qui engloberait à la fois le tout du passé, la mémoire de l'être et la puissance de la vérité, d'un actuel mutant differencié par le virtuel. Mais ce foncteur n'est pas temporel pour au moins trois raisons. La première est que l'actuel n'est pas totalement assujetti aux soubressauts du virtuel. La deuxième raison est qu'un foncteur temporel est irréversible et que s'il coïncide avec l'actualisation, il admet un foncteur adjoint qui est la virtualisation. Enfin, la troisième raison est que l'image d'un objet à travers le microscope est une actualisaton du virtuel par un dispositif totalement indépendant du temps. S'il existe des actualisations temporelles, il faut réfuter l'idée que la fonctorialité entre virtualisation et actualisation est purement temporelle.

La fonctorialité est le moteur de la théorie des catégories. Elle évite que les catégories ne se réduisent à des cases statiques dans lesquelles on rangerait sagement les objets observés. Elle empêche de transformer une théorie en une simple taxinomie. Une fois des catégories posées, elle joue le rôle moderne de ce qu'on appelait autrefois l'analogie ou la similitude, non pas en donnant simplement des rapports de ressemblance ou de convenance, mais en précisant par le biais de foncteurs ce qui de l'une des catégories se trouve dans l'autre, avec des objets comparables, des propriétés et des relations similaires et un mode de fonctionnement identique. Mais si la qualification par des foncteurs joue un rôle décisif, on comprend que lorsqu'on passe de la catégorie des groupes à celle des ensembles par le foncteur d'oubli, les objets résultants ne sont plus comparables à ceux de départ. Ce qui permet de relier deux catégories comme la qualité et la quantité est le foncteur de mesurabilité. Un balai bien fourni est un balai de bonne qualité. Mais s'il perd ses poils (si la mesure de ses poils diminue), il perd en qualité. La quantité de poils détermine dans ce cas la qualité du balai. Pour autant, il n'existe pas de critère de mesurabilité sur la catégorie des qualités. C'est dans la jonction fonctorielle que se produit cette déduction. Autrefois les déductions de ce genre ne pouvaient être faites que par une mise en rapport de proportionnalité des objets, construit sur des relations de cause à effet, comme l'œil est à la vision, ce que l'oreille est à l'audition. Aujourd'hui le caractère fonctoriel inclut un mode opératoire et s'étend à la dualité des objets comme le sont par exemple le champ magnétique et le champ électrique, les ondes et les particules. Pour le mathématicien géomètre, *être*, c'est d'abord *être localement*. Le passage du local au global est l'expression d'un foncteur qui par une série de recollements assure que dans toutes les marges et dans tous les recoins de l'espace, l'être global a une existence bien réelle. La fonctorialité a une fonction ontologique.

3. L'*universalité* reçoit une définition mathématique en théorie des catégories qui repose sur le caractère fonctoriel transcatégoriel. Elle est définie comme la solution unique d'un problème universel posé par un foncteur entre deux catégories. Elle est liée directement à la fonctorialité qui assure le transfert des propriétés d'une catégorie à une autre. Elle ne se définit pas par opposition au particulier mais par l'unicité de cet objet universel construit fonctoriellement. Il s'ensuit que l'universalité n'est pas une question de logique où les universaux sont toujours des prédicaments, mais une question de catégories et de topologie. Le chiffre cinq est universel non pas parce qu'il généralise des particuliers (cinq pieds, cinq chèvres) mais parce qu'il est l'unique successeur de quatre. L'universel est cette multiplicité que l'objet a d'unique, *l'expression de ce qui est versé à l'Un*. L'existence d'un produit et l'existence de limites sont des problèmes universels. On comprend qu'il ne s'agit pas de prédications, bien que l'instanciation de l'universel dans des particuliers reste vraie, mais de propriétés de l'espace catégoriel.

Qu'il soit considéré comme objet taxinomique ou comme objet machinique, le diagramme est le lieu où réside une certaine universalité soit parce qu'il représente un ensemble de schémas, soit parce qu'il cartographie un savoir universel qu'il distille dans des séries d'invariants. Il se pose alors deux questions : la première est de savoir s'il existe des diagrammes universels et la seconde est de se demander si un diagramme donné est capable de produire de l'universel. La première question généralise le problème posé par le structuralisme. La notion de diagramme est dans ce cas voisine de celle d'une structure, d'un objet théorique – qui a aussi été étudié en mathématiques par Charles Ehresmann et ses élèves sous le nom de théorie des esquisses – à la fois idéal et réel qui s'exprime dans un substrat, mais qui ne s'y actualise jamais en tant que tel. L'être du diagramme est alors un objet virtuel et s'il exprime une universalité, cette universalité est donnée par sa virtualité. La deuxième question est relative au mode de fonctionnement du diagramme. S'il est capable de produire de l'universel, c'est que la circulation des flux dans ce diagramme en tant qu'expression de la machinerie diagrammatique mène en un ensemble de points singuliers polycentré unique qui condense l'essentiel du diagramme. C'est dans cette singularité que naît l'universalité. Elle se déploie sur des réseaux d'invariants qui sont autant de candidats potentiels à l'universalité.

4. La *dualité* est la quatrième composante du quadrilatère épistémique. Elle trouve sa source dans la gémellité naturelle des choses et ne doit pas être confondue avec le double ou la binarité de certains objets. Il ne s'agit pas de réconcilier des collections de termes opposés, ni de réintroduire une ontologie dualiste fondée sur les particuliers et les universels, mais de comprendre les conséquences philosophiques de la notion de dualité telle que nous la trouvons dans les sciences. Les couples en dualité comme matière et antimatière, ondes et corpuscules, champs électrique et magnétique, analyse de Fourier en amplitude et en fréquences sont des termes qui ne s'opposent pas mais fonctionnent en parallèle en se mimant les uns les autres. Si un diagramme fonctionne dans un espace donné, le diagramme dual fonctionnera de façon inversée dans un espace coposé à l'espace d'origine. D'ailleurs les catégories mathématiques définissent leurs catégories duales par le renversement du sens des morphismes. Si on considère que le fonctionnement diagrammatique

des catégories est la machinerie posée par les morphismes, la dualité est alors une espèce de renversement des flux, un courant inverse qui produit le fonctionnement dual, par lequel l'objet et son dual sont presque identiques, mais toujours différents. La dualité catégorielle est la dualité du Même et de l'Autre : c'est là son origine démiurgique.

Mais la dualité, c'est d'abord ce qui autorise l'immanence et l'univocité de l'Être. Elle est le premier recollement de l'Un-Deux qui partant justifie l'Un-Multiple. Le dual est la preuve qu'il n'existe pas de multiplicité pure puisqu'il unifie dans un même être des composantes duales et que cet être ne peut qu'exister que parce que ces composantes existent. Comme l'Être et l'étant existent dans une co-appartenance qui fonde leur unité indissociable. Ce qui les distingue est leur différence. Elle ne devient dualité que lorsque les deux composantes fonctionnent en parallèle. L'enjeu est le degré de multiplicité que tolère la différence. Les composantes duales ne sont que très rarement des contraires car la dualité n'est pas un principe de coïncidence ou d'ajointement des contraires. Le dual est à la topologie ce que les couples d'opposés sont à la logique. La dualité n'est pas la fonctorialité de la relation logique de l'Être au Non-Être mais celle qui permet le transfert catégoriel de la relation de l'Être à l'étant vers la relation de l'Être à l'Un. Si l'Un est vide la dualité ne peut exister. Or les sciences physico-mathématiques nous montrent qu'elle existe, donc que l'Un n'est pas vide. Il ne peut être que l'Autre du divers de l'étant. L'Être n'est pas un multiple pur, inconsistant, soustrait à l'Un (Badiou), ni une modalité de l'Un (Deleuze), l'Être est une multiplicité duale et l'Un est le dual de cette mutiplicité.

Il s'ensuit que l'immanence est comme l'univocité de l'Être une conséquence de la dualité. Elle est inscrite dans la genèse du big-bang et du partage de la matière et de l'antimatière. C'est pourquoi le moment est venu de s'interroger sur la problématique du Deux, afin que par-delà l'histoire des sciences physico-mathématiques, ressurgisse l'interprétation philosophique de l'Un en tant qu'Un, comme dual de l'Être qui forme ce Deux. L'Être pensé comme Un-Tout est détruit par la différence. La dualité qui s'introduit dans cette différence le sauve de la destruction. L'Un-Multiple n'est viable que parce que cette dualité existe.

CHAPITRE 1

# Territoires du diagramme

Le diagramme mêle sous mille formes des séries intelligibles que le geste de l'homme organise avec ses propres ressources en laissant entrevoir l'outil en lequel le territoire se métamorphose pour lui conférer du sens. La signification suscitée par le dévoilement du geste revendique le cheminement qui l'a fait naître. Le dénouement du sens est à ce prix : reconstituer le geste dans le diagramme pour comprendre comment le sujet rencontre le sens.

## Les diagrammes du monde

Innombrables sont les diagrammes du monde. L'histoire montre que la philosophie comme la science n'a cessé de lire et de commenter des diagrammes. Du premier moteur mû aux développements les plus récents de la théorie des topoi, la multitude des diagrammes cherche localement une expression du monde. Non pas comme un substitut au langage, mais comme un complément dans le logos d'une fonction langagière pourvu d'une ouverture ontologique. Le diagramme se déploie dans sa dimension linguistique, plastique, mais aussi psychique. Car le diagramme n'a pas nécessairement de support matériel. Il est fait d'équilibres et de déséquilibres entre des territoires qui par intersection et combinaison de zones, d'aspects, de textures produit une *consistance*. La différence, la tensivité, l'intuition, l'iconicité, la potentialisation, le machinique sont autant de composantes du diagramme. Et les passages d'un diagramme à un autre sont des changements d'horizon ou de territoire qui s'effectuent aussi bien dans le sens d'une territorialisation, d'une normalisation que d'une déterritorialisation ou d'une déconstruction. Ce qui différencie le diagramme d'un plan, d'une figure, d'un schéma, d'un croquis, d'un graphe, d'une courbe ou d'une structure n'est pas de nature simple.

Dans la mesure où il connecte un espace à un autre, le diagramme ouvre la question d'une *topologie de la suture*. Une intuition intellectuelle opère dans les sciences. Cette intuition est partiellement représentée dans le diagramme, qui semble énoncer plus de choses qu'il n'y en a de figurées. C'est une caractéristique de la description diagrammatique, que chacun interprète selon sa propre histoire. Le sens circule dans le diagramme, mais de manières très différentes entre les composantes de la figure. Lorsque le diagramme est créé, il s'actualise et partant donne au réel une expression du virtuel qui enferme une part intuitive, une connotation d'un fragment de savoir qui n'est pas encore révélé et qui n'aspire qu'à un dévoilement de cette pré-connaissance. Cette idée accorde une portée ontologique à la liberté créative de l'homme et engage son sens esthétique.

Comme machine de sens, le diagramme est porteur d'une intuition topologique. La position des objets dans un diagramme n'est jamais neutre : l'organisation et la disposition des systèmes signifiants contraignent le sens du diagramme. Car l'espace abstrait ou physique est donateur de sens. Le chiffre zéro n'a le sens d'annihilation des quantités que parce qu'il partage l'espace également entre des quantités positives et des quantités négatives. Sa position centrale sur le plan de jonction entre deux mondes opposés lui confère le sens qu'il a, et le pouvoir de soustraire une quantité à une autre, d'annihiler complètement le poids du nombre. Si le nombre positif a une signification physique, le nombre négatif n'a de signification que parce qu'il mêle un concept opératoire (le soustractif) à un nombre positif. Chaque nombre positif ou négatif porte en lui la possibilité d'anéantir un autre nombre de signe opposé. Le résultat de cet antagonisme est le chiffre zéro qui n'a ni signe, ni poids. Sa position particulière au sein des nombres lui assigne son sens. En somme, le sens naît d'une bifurcation de l'espace.

Comme il n'est pas facile de dire ce qu'est une construction, il n'est pas facile de dire ce qu'est un diagramme. Même dans le cas d'une figure géométrique construite à la règle et au compas, il s'agit toujours de viser, au-delà des tracés matériels, un concept qui n'est pas complètement décrit, même si la construction montre explicitement qu'il est réalisé. Pour les mathématiques, une construction relève aussi bien du domaine de la géométrie que de l'algèbre. La construction débouche sur le tracé de figures, et par application des règles et des procédés fixés par convention conduit à la mise en espace formel de signes. D'où la pluralité des composantes diagrammatiques, faites de figures, de dessins et de croquis, qui eux-mêmes se composent de signes, d'idéogrammes, de textes et de symboles. Mais cela ne suffit pas à caractériser un diagramme. Le diagramme donne à penser plus qu'il ne représente : il actualise par construction des virtualités. Le diagramme n'est pas une démonstration. Inutile d'opposer le discursif à l'intuitif, ce qui se joue dans l'espace diagrammatique est un parcours de la raison par lequel s'opère une mise en coïncidence avec l'objet à connaître et non le déroulement mécanique de procédures démonstratives. Il n'y a nulle méthode formelle démonstrative dans le diagramme, car l'application d'une telle méthode conduirait à rendre la connaissance indépendante de sa matière. Au contraire, le diagramme cherche l'union intime avec l'objet à connaître. Car le diagramme est ce point de passage. Mais il peut être utilisé comme support démonstratif, car dans certains cas il devient la représentation vivante d'une démonstration. Nous en avons des exemples avec le théorème de Pythagore.

Si le diagramme est souvent abstrait, il ne faut pas en conclure trop vite qu'il est *désémantisé*, que l'abstrait ne peut lui donner un sens. Pas plus qu'il ne faut le réduire à un message sans code ou à une expression de sens sans référence qui n'aurait que deux composantes, l'iconique et le plastique, il ne faut lui assigner le rôle d'un signifiant pur. Car il n'y a de *figural,* de « signifiant visuel » que dans la décomposition que nous lui faisons subir. Le figural de Lyotard qui n'aurait aucun référent ne peut être isolé dans le diagramme, qui est précisément le lieu des relations privilégiées, même si nous sommes en droit d'affirmer sa « primauté ontologique ». Savoir si l'image a besoin d'une structure pour acquérir une signification est une question moins importante que de savoir pourquoi ce qui perce dans le diagramme a un sens contraint par la machinerie diagrammatique. La tension des formes, de la matière et de la texture sont autant d'éléments qui codent pour la signification du diagramme. C'est le rythme qui fait la texture et c'est le geste qui produit le rythme. Ce sont des agencements entre des éléments tensifs : la rencontre d'un territoire avec un autre provoque une mise en résonance, une entité d'interprétance qui définit à son tour de nouveaux traits sémantiques.

Le sens du diagramme se manifeste donc par la présence ou l'absence d'éléments qui engendrent par leurs relations des valeurs relatives au système. La courbure, l'angularité, l'intensité des pleins créent la tensivité du lieu. Les harmonies de résonance ajoutent à l'impassibilité des phénomènes une dimension nouvelle. La texture du diagramme est celle de la figure qui le compose, qui elle-même est l'équivalent du grain de la surface d'un objet. Le vide est un espace qui n'aspire qu'à être comblé et qui est tenu à distance. Cet écart accroît l'intensité créée par le vide. C'est un manque, qui remplit justement sa fonction de plein.

Le diagramme est toujours relatif à un lieu, son topos. Ce topos est un espace abstrait, non pas un endroit qui a une existence géométrique. Dans la *Physique* d'Aristote, le lieu est « la limite immobile immédiate de l'enveloppe »[1]. Car le lieu est toujours le lieu de quelque chose. Toute position est relative à un référentiel. Les objets qui sont dans un bateau en mouvement ont un référentiel relatif au bateau dans lequel ils ne bougent pas et un référentiel absolu qui est le référentiel terrestre et dans lequel ils se déplacent à la vitesse du bateau. Mais elle-même, la terre est en mouvement. Son référentiel est relatif à celui du soleil, et notre soleil, lié à notre galaxie, est lui-même en mouvement avec l'ensemble de cette galaxie. Le sens que l'on donne à un objet dépend du lieu à partir duquel il est pensé.

Le cadre, la bordure ou le contour assument un rôle sémantique important dans le diagramme et en retour lui donne un statut d'énoncé. L'accentuation des contours est un élément signifiant de la figure. Dans la figure d'un diagramme, lorsque la ligne s'épaissit, le sens donné à cette délimitation devient plus important que le trait est plus gras. Dans l'ordre temporel, l'accentuation des traits et des marges joue autant des constrastes que dans l'ordre spatial. Les éléments d'univers supposent des rapports de durée hétérogène et ce qui les définit est le sens qu'ils prennent relativement au contour temporel qui les borde. A l'âge classique, le panoptique de Bentham n'a de sens précis que relativement au droit pénal de cette époque. Il est, dit Foucault, « le diagramme d'un mécanisme de pouvoir ramené à sa forme idéale ; son fonctionnement, abstrait de tout obstacle, résistance ou frottement, peut bien être représenté comme un pur système architectural optique : c'est en fait une figure de technologie politique qu'on peut et qu'on doit détacher de tout usage spécifique. »[2]. Le panoptique conjoint historiquement la forme de la prison à la forme du droit pénal. C'est ce que nous appelons le caractère *fonctoriel*, ce caractère si particulier qui permet le passage d'une catégorie à une autre.

« Le panoptique est une machine à dissocier le couple voir-être-vu : dans l'anneau périphérique, on est totalement vu, sans jamais voir ; dans la tour centrale, on voit tout, sans être jamais vu. »[3] C'est une « machine abstraite », « une manière de faire fonctionner des relations de pouvoir dans une fonction, et une fonction par ces relations de pouvoir. »[4] Le panoptique est l'illustration de ce concept de machine diagrammatique, de flux, de tensions, d'équilibres et de désequilibres, de fini et d'infini, autant d'éléments qui circulent dans la figure et rendent le diagramme actif plutôt qu'opérationnel. Le machinique se réfère au diagramme, l'opératoire est de l'ordre de la structure. Dans ces multiples fonctions, la machinerie diagrammatique est le lieu des encodages territoriaux, des repérages et des cartographies. Tout concoure à la mise en œuvre de machines abstraites : des engrenages, des moteurs, des flux et des singularités produisent cette circulation de sens, localement, sans souci de généralité dans des dimensions plurielles et produisent une signification. Il n'y a nul besoin de construire une axiomatisation, qui se profilerait derrière le diagramme.

Dans le panoptique de Bentham, la prison voit et fait voir. C'est une machine de visibilité qui distribue les hommes, les lumières et les regards sous les effets coercitifs de la distribution du pouvoir et assujettit les corps pour les rendre plus dociles. Ce diagramme est l'image d'autres diagrammes qui se jouent dans l'espace sociétal. Qu'il s'agisse d'éducation, de santé ou de prison, le panoptique est le modèle de fonctionnement des rapports de pouvoir qui règlent la vie quotidienne des

[1] Aristote, *Physique*, 212a 20.

[2] M. Foucault, *Surveiller et punir*, p. 239.

[3] *Ibid.* p. 235.

[4] *Ibid.* p. 241.

hommes. C'est un espace architectural dont les fonctions n'ont de cesse d'imposer des conduites : l'image diagrammatique de la microphysique du pouvoir.

### Imago mundi

Il n'est pas étonnant que la révolution copernicienne[5] n'ait eu que si peu de conséquences sur l'ordre diagrammatique, car dans les représentations des orbes célestes, il suffit de remplacer la terre par le soleil pour qu'un simple changement de légende bouleverse l'ordre planétaire. En ce sens, le modèle cosmologique tient plus de la structure que du diagramme parce qu'il est à la fois imprégné des mythes de la création et de sources religieuses, et parce qu'il se construit sur un principe esthétique unique qui conjugue l'ordre cosmique, l'ordre du beau et l'ordre de la symétrie en une seule unité.

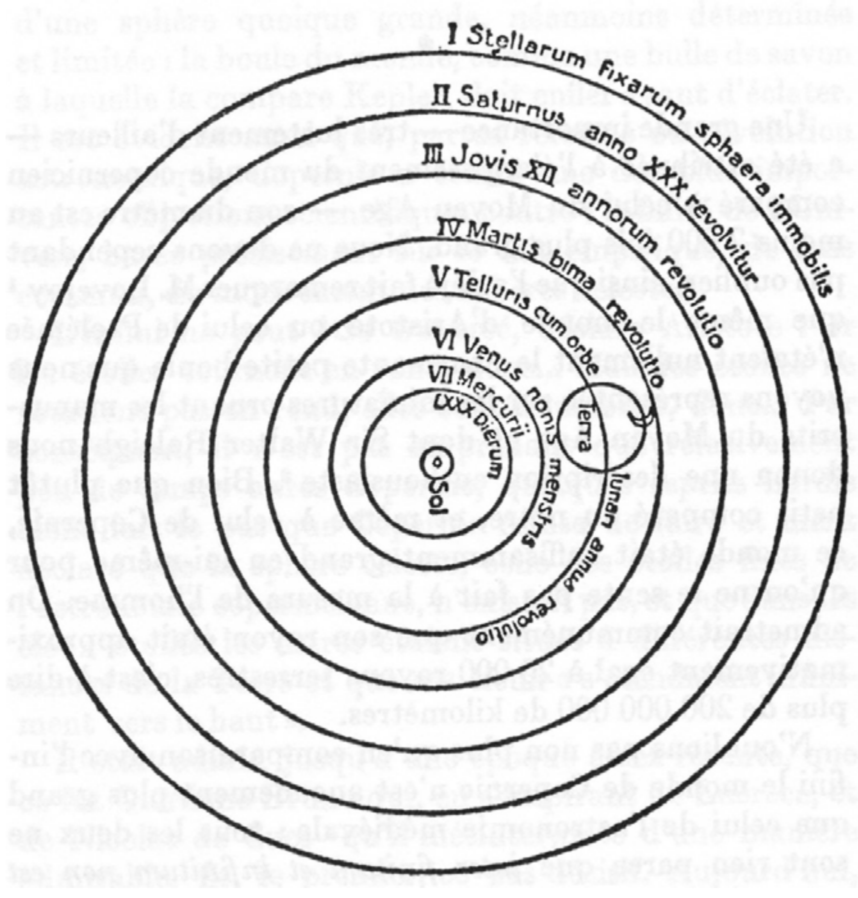



FIG. 1. Le monde copernicien héliostatique (in Copernic, *De Revolutionibus orbium coelestium*, Bâle, 1561, 2e édition)

L'ordonnance du modèle cosmologique, sa symétrie, est garante de son bien-fondé. La véracité du modèle repose sur l'idée que l'ordre du monde est parfaitement symétrique, qu'il ne saurait exister aucun manque de proportionnalité entre ses

[5] Voir aussi Thomas Kuhn, *La révolution copernicienne*, Fayard, 1973. Jean-Jacques Szczeciniarz, *Copernic et le mouvement de la Terre*, Flammarion, 1998.

parties. Kepler pense que la forme sphérique a été choisie pour représenter le contour du monde car parmi toutes les formes géométriques, elle est celle qui a le plus grand volume et donc peut contenir l'ensemble des astres. Elle est aussi l'expression d'une symétrie parfaite des planètes autour d'un centre absolu. Cette perfection dans l'agencement se retrouve dans les mouvements des corps célestes qui ne peuvent être que circulaires uniformes ou composés de mouvements circulaires uniformes. C'est selon Tycho Brahé le génie de Copernic de l'avoir considérée.

Lorsque pour expliquer l'absence de parallaxe des étoiles, Copernic dut repousser les limites du monde, de sorte que le volume du monde devint beaucoup plus grand, et que son apparence se trouva projetée dans un vide gigantesque, Tycho Brahé ne put admettre l'existence de ce vide qui brisait la pureté esthétique du modèle copernicien. Il soulignait un ordre asymétrique qui nécessairement s'opposait à la belle symétrie pensée comme condition suffisante de l'ordre planétaire.

Dans les modèles héliocentriques, la dissymétrie est une source de désaccords entre les auteurs. On compte parfois neuf, dix ou onze orbes et l'ordre des planètes varie d'un modèle à l'autre. Lorsque Kepler propose des ellipses en remplacement des cercles, il justifie sa découverte en arguant du fait que le mouvement des corps célestes repose sur des facultés naturelles et animales, et qu'il est par conséquent impossible d'atteindre la perfection pleine et entière.

Dans le *Mystère cosmographique*, il pose que l'ordonnancement des astres est fondé sur les polyèdres réguliers (cf. fig. 2).

> « La Terre est le cercle qui mesure tous les autres. Circonscris-lui un dodécaèdre : le cercle qui le comprend sera celui de Mars. Circonscris une pyramide à Mars : le Cercle qui le comprend sera celui de Jupiter. Circonscris un cube à Jupiter : le cercle qui le comprend sera celui de Saturne. Inscris maintenant un icosaèdre dans le cercle de la Terre : le cercle qui s'y inscrit sera celui de Vénus. Inscris un octaèdre au cercle de Vénus : le cercle qui s'y inscrit sera celui de Mercure. Voilà la raison du nombre des planètes. » (Kepler, GW, I, 13)

Mais les correspondances ne s'arrêtent pas là. Aux cinq polyèdres réguliers, Kepler associe les cinq éléments. Il remarque que le cube par sa stature droite et solide partage les mêmes qualités que la terre, que l'octaèdre suspendu par deux angles opposés symbolise l'air, que le tétraèdre par son aspect pointu évoque le feu, que l'icosaèdre est assimilé à une goutte d'eau et que le dodécaèdre, qui a autant de faces que le zodiaque compte de signes est associé à la matière céleste. Il distingue des formes masculines (cube et dodécaèdre), des formes féminines (icosaèdre et octaèdre) et une forme androgyne (tétraèdre). A chaque planète est associé un caractère correspondant aux propriétés géométriques des polyèdres. Comme il y a sept planètes, il y a sept arts libéraux. Les correspondances suivent l'ordre cosmographique.

La connaissance elle-même est à la mesure. Un polygone est « connaissable » si on peut en connaître son rapport au diamètre du cercle circonscrit. Ce que Kepler met en résonance avec les consonances musicales et qui conduit à une parfaite équivalence entre la connaissabilité géométrique et les intervalles harmoniques. Mieux : le rapport de l'aphélie à la périhélie de chaque planète est l'intervalle harmonique de chacune. Mars est une quinte, Saturne est une tierce majeure, Jupiter est une tierce mineure. En cela, il s'oppose à la tradition de la *tetractys* qui n'admettait que des consonances parfaites et ne pouvait admettre les tierces et les sixtes en raison du nombre cinq qui intervient dans leurs rapports harmoniques. Tierces et sixtes ont longtemps été jugées comme des dissonances.

Dans le modèle képlerien, le diagramme saturé n'a plus de potentialités. Toutes les ressources des figures géométriques des polyèdres platoniciens ont été employées et lorsque Kepler découvre deux nouveaux polyèdres non convexes qu'il appelle l'*échinus* (le hérisson) et l'*ostrea* (l'huître), l'harmonie du monde est dans l'impasse. Le diagramme ne fonctionne plus. Sans doute la correspondance des orbes planétaires et des solides platoniciens avait-elle des fondements hénologiques, en tant qu'expression d'un monde unifié et rassemblé dont les éléments se distribuent selon une combinatoire perverse et des attributions impropres. Mais l'inclusion des mondes et des formes, loin de recouvrir l'homologie ensembliste des parties, donne à rêver des correspondances et des liaisons qui puisent dans la suture géométrique des orbites et des cubes et redessine une harmonie des sphères que le pythagorisme avait déjà esquissée. En réalité, ce qui arrête le mouvement diagrammatique est ce qui l'a fait naître : la symbiose des trajectoires planétaires et des polyèdres étirés jusqu'à ce qu'ils se confondent parfaitement dans l'ordre cosmique sur une même échelle. L'emboîtement des figures géométriques joue de nouveau l'identification de l'homme au cosmos, sans que le diagramme ne fournisse la clef de cet édifice.

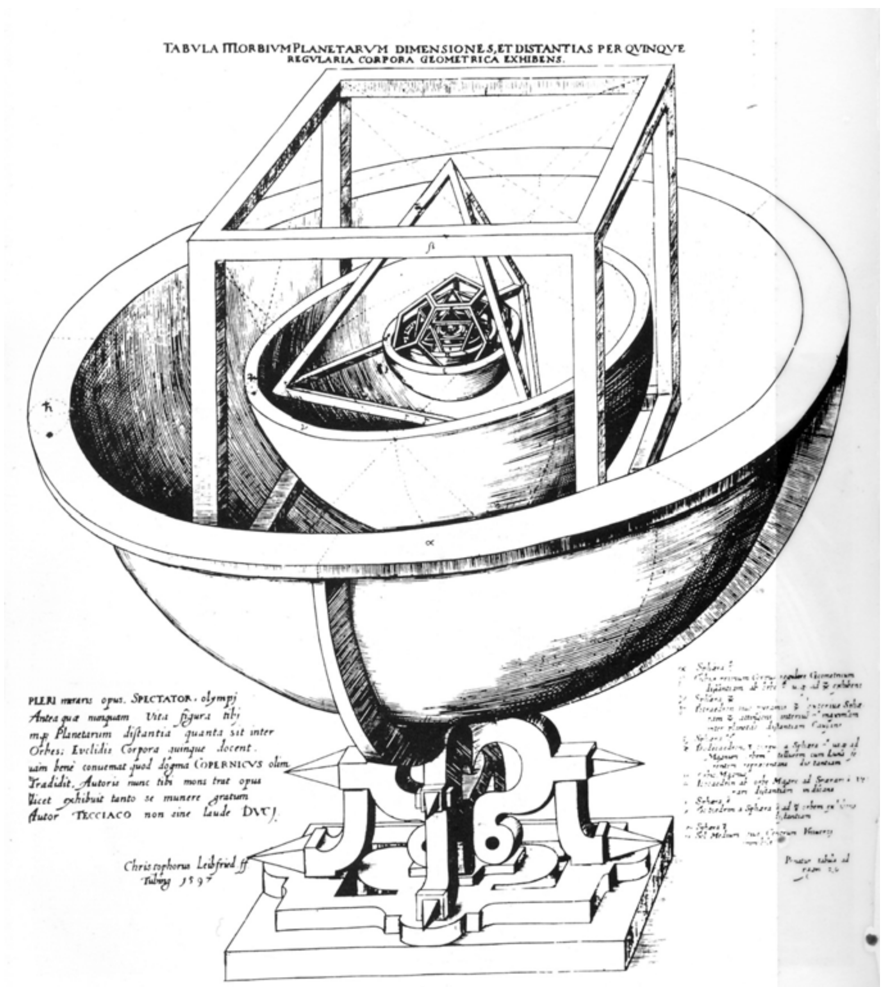



FIG. 2. L'harmonie du monde selon Képler in (Kepler, *Mysterium cosmographicum*, 1621, 2e édition, Francfort)

Si le *dodécaèdre augmenté* (l'échinus) ne peut trouver de place dans le diagramme des mondes, c'est aussi parce que sa forme et ses aspérités ne sont pas en parfaite union de l'ordre cosmique. Car le diagramme fonctionne sur le mode des résonances et si l'échinus s'avérait adpaté, il coderait une planète surnuméraire, éventuellement cachée. Entre la représentation fidèle du cosmos, la création des planètes et les polyèdres réguliers se déploient l'harmonie de l'acte créateur et l'insuffisance diagrammatique de cet emboîtement des orbes des planètes. Là réside l'échec du cosmogramme képlérien.

## Virtualités riemanniennes

Le point ne devient une singularité que lorsqu'il relie son lieu, son être-là à l'infini. Comme l'a fait remarquer Gilles Châtelet, le point 1, vu comme le lieu des points où $x = 1$ a un intérêt banal, mais il devient une singularité aux multiples virtualités lorsqu'il est pensé comme un puits infini $1/(x-1)$. C'est alors un passage entre l'un et l'infini, une expression du virtuel. On passe d'un point comme *racine* à un point comme *pôle*. Cette polarité qui fait « fleurir les points » n'a de sens que relativement à l'infini, pensé comme bord. La figure s'actualise parce que son en-deçà est virtuel. Le diagramme de Riemann est celui qui relie toutes les singularités à l'infini. Les racines s'assemblent, s'agglomèrent, tracent des ponts et dans leur union déterminent une limite, un bord topologique qui devient l'interface du virtuel.

Le *miracle de l'holomorphie* est le moment où affleurent sur le plan, des surfaces inexplorées, sous-jacentes qui naissent dans les marges et enjoignent le géométrique à trouver sa pure expression analytique. Comme si pour rejoindre le plan de la connaissance, il fallait exprimer les bords, en faire une limite dont le franchissement allait en révéler le sens. La solution d'une équation différentielle n'existe que sous certaines conditions, des conditions aux limites et des conditions de bord. Beaucoup de questions mathématiques reposent sur le *principe du maximum* qui montre l'importance du bord dans la détermination des valeurs d'une fonction. Une fonction harmonique ne prend dans son domaine que des valeurs comprises entre la plus petite et la plus grande des valeurs prises par la fonction sur le bord de son domaine. C'est une fonction dont l'amplitude est entièrement déterminée par sa valeur au bord[6]. Le bord est avant la marge. C'est la frontière qui détermine le passage entre des éléments actuels et des éléments virtuels et qui s'exprime à travers des singularités. Car le singulier a des propriétés voisines des propriétés du bord. Ce sont les trous du réel qui en faisant surface offrent à la connaissance les affres de l'illimité singulier.

Dans les espaces topologiques, ce qui distingue l'ouvert du fermé, c'est précisément le bord. Pour le mathématicien, la topologie d'un espace se définit par la donnée de ses sous-ensembles ouverts ou de manière équivalente par la donnée de ses sous-ensembles fermés, ou encore de ses voisinages. Mettre une topologie sur un espace, c'est déterminer les applications qui ont la propriété d'être continue. Par conséquent, dire ce que sont les bords, le différentiel ouvert-fermé, n'est ni plus ni moins qu'une détermination ou un choix des applications continues. Et le continu est justement ce qui peut être atteint sans ambages, directement sans passer par les fractures que posent les bords. Le bord a donc plus de sens qu'il n'y paraît. L'ensemble des bords qu'il soit chaotique ou non est diagrammatique. C'est le lieu

[6]De nombreux résultats mathématiques confirment ce principe en variant les hypothèses. Les théorèmes obtenus sont du type du *théorème de Phragmén-Lindelöf* : Soit $f(z)$ une fonction analytique régulière dans un domaine $\Omega$ de $\mathbb{C}$. Si $f$ ne dépasse pas une certaine valeur $M$ en un point $u$ de son bord $\partial\Omega$, $\limsup_{z\to u, z\in\Omega} |f(z)| \leq M$, alors le module de $f(z)$ reste majoré par $M$ partout dans $\Omega$, $|f(z)| \leq M$. E. Phragmén, E. Lindelöf, "Sur une extension d'un principe classique d'analyse", *Acta Math.* 31 (1908) p. 381-406.

des points où le sens peut s'enflammer et devenir plus aigu. Le lieu des « centres d'indifférence » où se scèlent le pacte et l'alchimie de l'entendement et de l'intuition.

Mais il y a plus : les variétés riemanniennes ne sont pas dissimulées sous des points, mais émergent de la jonction de points singuliers à l'infini. C'est ce regroupement des singularités en une trame connectée à l'infini qui est garante de la vitalité des surfaces. C'est en outre cette incursion de l'infini qui permet que le virtuel s'exprime. Pour comprendre l'ampleur et les enjeux de l'holomorphie, il faut revenir à la fonction logarithme. Cette fonction n'est pas définie sur tout le plan complexe. Pour pouvoir la définir pleinement, il faut d'abord définir une coupure du plan qui consiste à relier par une ligne polygonale l'origine du plan à l'infini. Lorsqu'on se promène sur le plan complexe, et lorsqu'on tourne autour de l'origine, la fonction logarithme a un comportement particulier lié au fait que la fonction exponentielle est invariante par addition de tours[7]. Cette invariance se traduit par le fait qu'un ou plusieurs tours autour de l'origine dans un sens ou dans l'autre ne change pas la valeur de cette fonction. La fonction inverse de la fonction exponentielle qui est la fonction logarithme cherche à restituer ce terme additionnel représentant le nombre de tours et a donc plusieurs déterminations. D'où l'idée de Riemann de fabriquer dans le plan un hélicoïde qui supporte la structure des déterminations du logarithme. Pour construire cette surface, il suffit de prendre une infinité de feuillets représentants des exemplaires du plan, puis sur chaque feuillet, de placer l'origine, de tracer les axes des abscisses et des ordonnées, et de découper la partie positive de l'axe des abscisses. Ensuite, il suffit de recoller le bord inférieur de la coupure du feuillet $n$ avec le bord supérieur de la coupure du feuillet supérieur $n+1$. De cette manière, on construit un hélicoïde (ou une *vis*) infini qui nous fait passer au feuillet supérieur lorsque nous tournons autour de l'origine dans le sens trigonométrique et qui nous fait passer au feuillet inférieur lorsque nous tournons dans le sens inverse. Dans le plan, au voisinage de l'axe des abscisses $x + i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) le logarithme aura une valeur limite lorsque $\epsilon$ tend vers 0, qui sera le logarithme $\log(x)$ de $x$, alors que sur la rive opposée $x - i\epsilon$ la limite sera égale à $\log(x) + 2\pi$. Parce que pour atteindre cette rive, il faut tourner autour de l'origine et que par conséquent dans la surface de Riemann passer au feuillet supérieur (ou inférieur selon le sens de rotation). Résumons : à partir du plan complexe, la singularité en zéro pose un bord qui se constitue en reliant l'origine à l'infini et sous la surface lisse du plan complexe pousse une vis sur laquelle se déploie la fonction logarithme.

Toutes les fonctions qui dépendent du logarithme ont un comportement similaire qui dépend de cette propriété. En particulier, les fonctions puissances[8]. La surface de Riemann de la fonction qui représente la racine $n$-ième de $z$ est un hélicoïde construit de la même manière que précédemment mais dont l'amplitude est restreint à $n$ feuillets. Le bord du dernier feuillet qui est libre est alors recollé au bord du premier feuillet (qui lui aussi est libre) pour former une surface sur laquelle la circulation est infinie : lorsqu'on tourne indéfiniment autour de l'origine, on quitte le dernier feuillet pour revenir au premier. Dans certaines zones du plan, la fonction n'aura pas les propriétés usuelles des puissances. On trouvera des secteurs du plan où la fonction puissance ne sera pas en adéquation avec la fonction racine[9]. Lorsque la singularité porte sur un point $a$ et non plus sur l'origine du plan, c'est le point $a$ qui est relié à l'infini pour définir sur une surface de Riemann la fonction holomorphe $\sqrt{z-a}$. Pour une fonction polynomiale quelconque dela forme

[7] La fonction exponentielle d'un complexe est invariante par addition d'un multiple de $2i\pi$ car $e^z = e^{z+2ik\pi}$. Le nombre entier relatif $k$ représente le nombre de tours. Il est compté de manière positive si on tourne dans le sens trigonométrique et de manière négative si on tourne dans l'autre sens.

[8] Les fonctions puissances sont des fonctions du logarithme $z^\alpha = e^{\alpha log z}$.

[9] Plus précisément, il existe des zones où $(z^{\frac{1}{n}})^m \neq (z^m)^{\frac{1}{n}}$.

$\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)...(z-a_m)}$, il faudra relier tous les points $a_1, a_2, ..., a_m$ par une ligne polygonale jointe à l'infini ou simplement étoilée pour en faire une catégorie unique offerte à l'infini. Comme on le voit sur cet exemple, il ne s'agit pas de pôles, mais simplement de racines polynomiales. Les virtualités sont aussi dans les racines. Ce qui importe est le geste qui consiste à les connecter à l'infini. Comme Gauss, il faut habiter les surfaces. Le mathématicien comme le physicien ne peut se contenter de faits réels, il ne peut les expliquer que s'il prend en acte un ensemble de virtualités. Tous les traités de mécanique qui énoncent le principe des travaux virtuels le disent : pour apprécier justement une situation physique des corps statiques ou en mouvement, on ne peut se passer d'inclure les éléments virtuels dans la transcription mathématique de cette situation. Dans le calcul des variations, on associe à la trajectoire réelle un ensemble de trajectoires virtuelles indéfiniment voisines. La déformation d'une trajectoire dans un voisinage restreint est une idéalisation du virtuel, nécessaire à la transcription des lois physiques. Les sciences physico-mathématiques ne s'occupent que des phénomènes de ce monde, il s'ensuit que le virtuel est une composante du réel. Les modèles de physique contemporaine rivalisent d'ingéniosité pour produire des hypothèses sur la structure du virtuel. Les correspondances des observations et des expériences respectent la structure du virtuel et jouent de l'invariance dans cette structure comme c'est le cas pour le groupe de Lorentz, le groupe conforme ou la supersymmétrie.

## Gestes et orientations diagrammatiques

Comprendre, c'est assimiler un geste, être capable de le reproduire et de le prolonger[10]. Ce geste qui saisit un domaine, qui associe l'œil et la main, qui cherche une connaissance véritable ne peut disjoindre agir, comprendre et sentir. Car là est la clé de toute compréhension créatrice. Non pas une compréhension gelée, figée, indexée sur le signe, où tout est explicite, comme dans une démonstration mécanique qui enchaînerait les inférences logiques, mais une intelligibilité créatrice où l'on ne peut donner tout ce qu'il y a à comprendre, où le virtuel joue un rôle crucial. C'est ce mode d'intelligibilité qui permet de poursuivre le geste et le véritable enjeu du diagramme qui donne à voir plus que l'œil ne perçoit. « Un diagramme peut immobiliser un geste, le mettre au repos, bien avant qu'il ne se blottisse dans un signe, et c'est pourquoi les géomètres et les cosmologistes contemporains aiment les diagrammes et leur pouvoir d'évocation péremptoire. Ils saisissent les gestes au vol ; pour ceux qui savent être attentifs ce sont les sourires de l'être. »[11]

Le propre du diagramme, c'est la *trace*. Trace du suspens et de l'inexistence locale des temps, parce que le diagramme n'est ni matière, ni proposition, mais simplement passage et témoin de l'absent. S'il se réfère au transcendant, c'est aussi sa manière de convoquer un ensemble de traces. Le diagramme donne à penser ce qui n'est pas inscrit. C'est par conséquent une marque de l'absence fondamentale qui est au cœur de la question de l'existence et c'est pourquoi il laisse entrevoir les *sourires de l'être*. La trace est l'expression d'un cheminement qui n'a plus de dynamique. C'est une image diachronique d'événements gelés qui reste immobile et qui a perdu le temps qui l'a fait naître. C'est l'image d'un passage qui autorise le surpassement de la philosophie : celui de déchiffrer les sourires de l'être, le dévoilement du geste créateur immobilisé par l'expression diagrammatique.

Cette distinction entre l'acte d'intelligibilité créatif et l'acte d'intelligibilité déductif n'est pas une distinction cartésienne. Les actes de connaissance chez Descartes, tels qu'ils sont présentés dans la *Troisième règle* sont des actes par lesquels

[10] J. Cavaillès écrit à propos de « l'intuition centrale d'une théorie » que « Comprendre, est en attraper le geste et pouvoir continuer. » in *Méthode axiomatique et formalisme*, p. 178.

[11] G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, p. 33.

on parvient à la connaissance sans crainte d'erreurs. Ils sont deux : l'*intuition* et la *déduction* – inséparable de la méthode – auquel s'ajoute l'*induction* qui paraît être un cas particulier de la déduction. L'intuition de Descartes est une représentation qui ne laisse aucune place au doute. C'est la certitude d'une connaissance par « l'intelligence pure et attentive »[12] qui s'origine dans les lumières de la raison. L'intuition cartésienne ne saurait se résoudre à un acte d'intelligibilité créatif. Dans l'empire du *cogito*, le doute ne peut s'immiscer dans l'intuition. Une proposition comme "le carré a quatre côtés" ou comme "les médiatrices du triangle se coupent en son centre" est une certitude *que celui qui existe et qui pense* voit par intuition. L'intuition cartésienne est plus simple et plus sûr que la déduction. Elle est aussi inaccessible au doute. Cette certitude est la conséquence même de la perfection de l'esprit humain. Mais ces actes ne prennent leur sens que par l'action conjuguée des puissances et des facultés que sont les sens, l'imagination, la mémoire et l'entendement (*Règle XII*). Seul, l'entendement a le pouvoir de percevoir la vérité. L'acte d'intelligibilité créatif ne peut se résoudre à la seule intuition. Il se situe plutôt entre l'intuition et la déduction. Sur les diagrammes de Feynman que nous verrons un peu plus loin, le sens du diagramme est à la fois l'image de l'interaction particulaire (son coté intuitif) et le mécanisme opératoire des règles de calcul (son coté déductif).

Le geste enveloppe avant de saisir. Et de cet englobement naît la puissance génératrice du geste. Il est ce qui met en relation un avant et un après, ce qui relie deux régions de l'espace physique ou mental, met en contact un terme extérieur et un terme intérieur. Cette propriété de transférer une partie en une autre est le caractère *fonctoriel* du geste. C'est un caractère que nous retrouvons dans le diagramme qui est un *geste fossile* à partir duquel nous recréons de nouveaux gestes. Le geste est un passeur qui immobilise dans le diagramme autant d'éléments que de gestes récursifs[13]. Conglomérat de paroles gelées, d'expressions et de symboles figés, le diagramme reconstitue le mouvement par des ensembles d'éléments et de symboles qui par une tension calculée organisent une dynastie de gestes. Le geste dépose dans le diagramme une opération, engendre une nouvelle esquisse, qui à son tour dépose un nouvel élément ou altère l'élément précédent. Dans ce ballet récursif des gestes naît la pression du virtuel qui donne au diagramme sa force et sa technique d'allusion. Cette tension de la virtualité impose une dimension nouvelle, un mode d'existence du diagramme « tel que sa genèse fait partie de son être. »[14].

Comment cheminer dans la pensée ? Ne faut-il pas reprendre la question de Kant : Qu'est-ce que s'orienter dans la pensée ? Ou mieux sa version moderne : Qu'est-ce que s'orienter *diagrammatiquement* dans la pensée ?[15] L'orientation de la pensée est « ce qui règle dans cette pensée les assertions d'existence. Soit ce qui, formellement, autorise l'inscription d'un quantificateur existentiel en tête d'une formule qui fixe les propriétés qu'on suppose à une région d'être. Ou ce qui, ontologiquement, fixe l'univers de la représentation pure du pensable. »[16] L'orientation

---

[12] R. Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, p. 85.

[13] Voir aussi le concept de *pulsation* que René Guitart développe à propos du geste in *Evidence et étrangeté. Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud*, Paris : Presses Universitaires de France (2000) et *La pulsation mathématique ; Rigueur et ambiguité. La nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire*, Paris : L'Harmattan (1999).

[14] G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, p. 33.

[15] C'est la question que pose Charles Alunni dans "Diagrammes et catégories comme prolégomènes à la question : *Qu'est-ce que s'orienter diagrammatiquement dans la pensée ?*" in *Théorie, Littérature, Enseignement*, p. 83-93.

[16] A. Badiou, *Court traité d'ontologie provisoire*, p. 50.

formelle se réduit ici à une orientation logique, à la possibilité d'ordonner les formules en une forme prénexe existentielle en évoquant les formes de Skolem[17]. Elle règle les axiomes et les processus de fondation formels des sciences, dès lors que le quantificateur existentiel est le premier symbole de ces axiomes ou processus démonstratifs. Il s'ensuit que l'orientation badiolienne est contrainte par la logique classique, alors que l'orientation diagrammatique est la liberté simple et spontanée de cheminer dans la pensée. Elle pose de nouveau la question de la logique de la découverte scientifique, mais dans sa spontanéité même.

L'expérience de pensée est pour Gilles Châtelet une permutation des rôles, un changement de place de l'entendement et de la nature. Archimède, Oresme, Argand, Einstein, Grassmann et Maxwell déplacent le centre du mobile pour inventer de nouveaux horizons. Ce déplacement évolue avec la maturation des diagrammes : les rectangles d'Oresme se diluent dans la mise en perspective de la relativité restreinte, comme les boucles de l'électrodynamique se transforment en hélices[18]. Si l'ordre diagrammatique s'en trouve perturbé, c'est bien la preuve qu'une transformation opère au cœur de la relation entre physique et nature. Et si l'expérience de pensée ne prouve rien, il n'en demeure pas moins qu'elle inscrit dans le diagramme la trace du geste qui lui a donné naissance. L'expérience de pensée est une expérience diagrammatique. Ce geste fossile qui est figé dans le diagramme, convenons de l'appeler *spectre*. Les gestes que le diagramme capte et qu'il suscite participent d'une « lignée de diagrammes » qui règle l'orientation de la pensée. Le déplacement dans la nature et le déplacement dans la pensée sont les lieux d'expression du diagramme. Une grammaire des diagrammes ne saurait rendre compte de cette déterritorialisation. Entre les devenirs, les stratagèmes allusifs, les lignes de fuite et les espaces striés du diagramme les spectres défont les certitudes acquises pour mieux cerner par la capacité du regard intérieur le monde tel qu'il se déploie et l'expression de ses virtualités. Dans une diagrammatologie bien tempérée, le diagramme n'est pas un moteur d'inférences logiques, mais l'expression d'un déploiement de spectres.

## Diagramme, schème et schéma

Comment la subsomption de ces gestes sous un diagramme, et par conséquent l'émergence de virtualités comme événements est-elle possible ? Cette question n'est-elle pas équivalente au problème de la subsomption kantienne d'un objet sous un concept ? Ne s'agit-il pas de remplacer le schématisme kantien par une théorie diagrammatique renouvelée ? Si tel était le cas, nous nous proposons de montrer qu'il n'y aurait aucun intérêt à développer le concept de diagramme, ni celui de spectre qui seraient respectivement identifiés au schéma et au schème.

Dans la théorie kantienne, la subsomption d'un objet sous un concept induit que la représentation de l'objet est homogène à la représentation du concept, de sorte que le concept renferme « ce qui est représenté dans l'objet à y subsumer. »[19] Le concept empirique d'une assiette est homogène au concept géométrique du cercle. Or les concepts purs de l'entendement sont hétérogènes aux intuitions sensibles. Se

[17]Toute formule est équivalente à une forme prénexe. Soit $\varphi = Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n\ \psi$ une formule prénexe et soient $i_1 < ... < i_m$ les indices tels que $Q_i = \exists$. On définit les *fonctions de Skolem* $f_1, ..., f_m$ comme les nouveaux symboles $f_r$ de fonctions des variables $y_j$ pour $j = 1, ..., i_r - r$. L'arité de $f_r$ est $i_r - r$, c'est-à-dire correspondant au nombre $(i_r - r)$ de $\forall$ situé à gauche du quantificateur $Q_{i_r}$. Si le premier symbole $Q_1$ est le quantificateur $\exists$ alors $f_1$ est un symbole de constante. La *forme de Skolem* de $\varphi$ est obtenue à partir de $\varphi$ en enlevant les quantificateurs $\exists$ du préfixe et en remplaçant dans la formule $\psi$ chaque occurence de la variable $x_{i_r}$ par les fonctions de Skolem.

[18]G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, p. 36.

[19]E. Kant, *Critique de la raison pure*, p. 187-188.

pose donc la question de leur subsomption. La solution, dit Kant, est qu'il existe un troisième élément qui est le *schème transcendantal*, homogène d'un côté aux concepts et de l'autre à l'intuition, et qui est une représentation intermédiaire pure joignant le côté intellectuel d'une part et le coté sensible de l'autre. La subsomption des intuitions sous les concepts devient possible, et par conséquent l'application des catégories aux phénomènes est elle-même possible. Ce qui permet de dire qu'une catégorie comme la causalité qui ne peut être perçue par les sens est aussi renfermée dans les phénomènes. Le transfert, nous disons le caractère fonctoriel, permet l'application des catégories aux phénomènes. La subsomption est donc le *foncteur* qui relie les catégories kantiennes à la catégorie des phénomènes.

N'est-ce pas un problème analogue qui se pose lorsque les gestes figurés par le diagramme révèlent des fragments ou des ensembles d'événements. Le passage du geste à l'événement est-il similaire au passage de l'intuition au concept, avec un médiateur qui dans un cas est le spectre du diagramme et dans l'autre le schème kantien ? Ce qui semble commun à ces deux passages est le caractère fonctoriel qui agit l'un, des diagrammes aux événements et l'autre, des catégories aux phénomènes, bien que les deux foncteurs soient différents. La fonctorialité induit des similarités entre deux théories sans pour autant les confondre l'une et l'autre, comme le font les caractères d'équivalence ou d'isomorphie.

Le moteur de ce foncteur, ce qui l'alimente et le met en œuvre, est dans le cas de la théorie kantienne la transcendance qui assure au schème la possibilité de mettre en rapport des concepts purs de l'entendement avec des objets et de leur donner une signification. Dans notre cas, le moteur du foncteur est la machinerie diagrammatique, le noyau qui permet au diagramme de fonctionner et de produire une signification. Ce moteur qui confère au diagramme son mode de fonctionnement a un pouvoir d'engendrement plus important encore. C'est lui fait fleurir le geste et déploie ses virtualités.

Le schème kantien est le produit de l'imagination. C'est l'image mentale d'un concept. Chez Piaget, le schème est la compréhension intuitive avant toute formulation langagière d'une réalité saisie dans son entière complexité. Le schème prélude aux opérations logico-mathématiques. Le schéma est quant à lui la traduction graphique ou linguistique des éléments saisis ou compris à partir d'un schème mental. Pour autant, le schéma ne doit pas être assimilé à une réalité objective et le schème à un phénomène subjectif. L'un et l'autre sont pris dans la dualité de l'objet et du sujet, simplement, ils n'interviennent pas au même moment du processus. Concevoir que le schème est une image mentale et le schéma une image graphique revient à dire que le schème est subjectif et que le schéma est objectif. Les considérer dans leur aspect temporel suppose que le schème est la saisie d'une réalité avant toute prise de conscience de cette saisie, tandis que le schéma est la compréhension plus ou moins complète de cette même réalité, mais réfléchie, ayant pleinement conscience de cette image mentale. Schème et schéma se manifestent à la conscience à différents instants. La distinction entre schème et schéma est complètement indépendante du caractère figuratif ou abstrait des images. La construction d'un objet comme un triangle correspondant à un concept donné par représentation se fait soit dans l'intuition pure par la seule imagination, soit dans l'intuition empirique lorsqu'il est dessiné sur une feuille de papier. Dans les deux cas, il s'agit d'une connaissance a priori. Le résultat de cette construction est indépendant de toute expérience. Le schéma est un dessin qui apparaît le plus souvent sous une forme simplifiée réduite à l'essentiel, tandis que le schème[20] est une forme intermédiaire entre le concept

[20]Il existe des notions différentes du schème : le schème transcendant de Kant (*Critique de la Raison Pure*, p. 185), le schème dynamique de Bergson (*L'Énergie spirituelle*, p. 199), le schème symbolique de Flach (*Über Symbolischen Schemata in produktiven Denker Prozess*, Arch.

et l'image. La représentation mentale d'un concept comme la représentation d'un nombre est un procédé général de l'imagination qui procure à un concept son image que Kant appelle le schème[21]. Il est différent de l'image physique d'un nombre qui sera soit sa transcription symbolique (par exemple 3), soit sa forme énumérative $(1+1+1)$. Le schème kantien est donc un pont entre les productions de l'entendement et les réalisations de la sensibilité. Il ne s'apparente au diagramme que dans la mesure où il est une actualisation dans l'espace et le temps des catégories.

Dans la théorie kantienne, les concepts doivent être temporalisés, c'est-à-dire avoir une occurence temporelle pour pouvoir accéder au statut de phénomène ou se phénoménaliser. Le nombre est le schème de la quantité, le degré est le schème de la qualité, la permanence est le schème de la substance, la succession est le schème de la causalité, la simultanéité est le schème de la communauté. Le schème de la possibilité est l'accord des représentations prises avec leurs contraintes temporelles (les contraires ne peuvent pas exister simultanément, mais successivement). Le schème de la nécessité est l'omnitemporalité. Est-il nécessaire de situer le diagramme ou le geste dans une perspective temporelle ? Certes, ce qui contraint la théorie kantienne à l'introduction d'une notion temporelle est que le foncteur de subsomption aboutit à la considération de phénomènes qui n'existent que par le temps. Or l'existence d'un événement est tout autre. Il n'est pas toujours nécessaire de situer le foncteur diagrammatique dans une perspective temporelle.

Les jonctions entre schèmes et concepts relèvent d'une activité inconsciente de l'imagination. Les catégories ne représentent un objet que si elles sont schématisées. En d'autres termes, c'est le schématisme qui leur donne une signification. Pour Heidegger, le schématisme est le moment où l'imagination transcendantale fonde la connaissance ontologique.

Ce qui différencie le schématisme kantien de considérations diagrammatiques est la possibilité qu'offre le diagramme de considérer l'objet dans ses composantes actuelles et virtuelles. Pour percevoir les virtualités, il faut que l'objet perçu et les formes de sensibilité soient dans une situation singulière qui permette le passage entre l'actuel et le virtuel. Ce passage suppose non pas que la connaissance serait dépendante ou indépendante de l'expérience, mais que la connaissance ne peut être à travers le diagramme qu'une connaissance adaptée par la situation.

Pour connaître les choses, la science a besoin de décrire précisément des phénomènes, se doit d'établir des démonstrations infaillibles, et par conséquent substitue des concepts aux intuitions. Dans de telles conditions, peut-elle accepter de construire ses connaissances sur des éléments intuitifs et quel statut peut-elle accorder aux diagrammes ? La connaissance mathématique n'est-elle pas la connaissance rationnelle par excellence ? Si la connaissance n'est que le produit d'une déduction logique, elle ne peut admettre de recourir à des diagrammes pour établir des formules. A moins que l'intuitif ne soit que l'antichambre du connaître. Le diagramme ne serait alors qu'un artifice pour saisir les objets à connaître. Les concepts permettraient de penser l'objet et rendraient intelligibles les intuitions. La compréhension et les heuristiques se situeraient au niveau du diagramme, qui se verrait attribuer un rôle plus pédagogique que démonstratif. La méthode formelle d'enchaînements mécaniques de propositions serait alors la seule possibilité d'établir une démonstration fiable. En même temps, la logique serait suspecte et regardée avec méfiance parce

f. ges. Psych. Band L. II, p. 369), le schème de Sartre (*L'imaginaire*, p. 121), le schème sensori-moteur de Piaget (*Psychologie et épistémologie*, p. 85), le schème de Gonseth (F. Gonseth, *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique*). Voir aussi G. Revault D'Allonnes (*La Schématisation*, in G. Dumas, *Nouveau traité de psychologie*, tome IV, p. 257). Les liaisons avec les neurosciences sont développées par Daniel Andler, Paul Smolensky et Andrew Woordfield in D. Andler, *Introduction aux sciences cognitives*.

[21] E. Kant, *Critique de la raison pure*, p. 189.

qu'elle mettrait de côté l'objet à connaître. Car d'où vient dans la méthode formelle la confiance accordée à cet enchaînement logique de deux propositions ? N'est-ce pas par une évidence assujettie que l'inférence logique progresse ? Et une fois la démonstration établie, ne peut-on pas en dessiner une représentation diagrammatique qui figurerait l'ensemble des points d'articulation. Quel crédit accorderait-on à ce nouveau diagramme ?

Le diagramme permettrait de percevoir sans intermédiaire, sans que rien ne s'interpose entre l'objet et la connaissance qu'on en a. L'objet serait immanent à l'acte de connaître. Kant distingue deux sources de connaissance. La première est le pouvoir de recevoir des représentations, la seconde est celui de connaître un objet au moyen de ces représentations. Dans le premier cas, les objets nous sont donnés par l'intuition. Dans le second, ils sont pensés par l'entendement. Concepts et intuition constituent les éléments de toute connaissance. Il y aurait ainsi une phase statique de la connaissance par laquelle l'intuition se confondrait avec son objet et une phase dynamique où se situerait la démonstration menant des hypothèses à la conclusion. L'actualisation de l'objet se situerait au niveau de l'intuition et la compréhension des représentations de cet objet serait localisée au niveau des concepts. L'idée de Kant est qu'il existe des concepts purs ou *catégories* qui sont les concepts primitifs de l'entendement, et qu'il existe des intuitions pures, comme les intuitions empiriques. Les connaissances a priori sont celles qui « sont absolument indépendantes de toute expérience »[22] et les connaissances pures sont parmi les connaissances a priori celles « auxquelles n'est mêlé absolument rien d'empirique. » Cette distinction des modes de connaissance se fonde sur la division des perceptions en idées et impressions par l'entendement et la sensibilité. « Les sens doivent nous donner la matière et l'étoffe de la connaissance, et cette matière est façonnée par l'entendement. »[23]

Kant distingue encore la connaissance philosophique et la connaissance mathématique, car dit-il, « la connaissance philosophique est la connaissance rationnelle par concepts et la connaissance mathématique est une connaissance rationnelle par construction de concepts. »[24] « Or construire un concept, c'est présenter a priori l'intuition qui lui correspond ». C'est bien en construisant des objets dans l'intuition pure que les mathématiques réalisent des synthèses a priori. Cette distinction de l'intuitif et du discursif n'est pas dénuée de conséquences. Les jugements que l'on démontre en mathématiques sont des jugements synthétiques a priori. Car l'application des lois logiques à des concepts mathématiques conduit à des jugements analytiques, tout à fait a priori. Or les propriétés que l'on démontre, surtout en géométrie, sont dérivées de l'intuition de l'espace. Les conséquences d'un schéma relèvent donc des jugements synthétiques a priori. L'intuition pure est le principe du jugement synthétique a priori, comme l'expérience est le principe des jugements synthétiques a posteriori.

La dichotomie kantienne distingue l'usage discursif de la raison procédant par concepts et l'usage intuitif fondé sur la construction de concepts. Elle ne laisse aucune place à l'usage diagrammatique qui façonne la connaissance par inclusion d'éléments virtuels.

### Diagramme et structure

La structure ne peut se séparer de son origine cosmogonique. C'est ce qui la distingue fondamentalement du diagramme. Elle se doit d'expliquer la formation de l'univers, et corrélativement assigner la place de l'homme dans le monde. C'est

[22] E. Kant, *Critique de la raison pure,* p. 67.
[23] E. Kant, *Leçons de métaphysique*, p. 219.
[24] E. Kant, *Critique de la raison pure,* p. 493.

pourquoi elle oscille constamment entre structure transcendantale et structure immanente. Car la structure dans sa rationalité même et sa propension à organiser le monde cherche toujours à rejoindre le sujet, à le serrer de plus en plus près et donc à le limiter dans sa liberté. Entre la transcendance du sujet et l'immanence de l'objet, la structure en tant qu'organisme oublie le geste créateur qui lui fournirait la dialectique dont elle a besoin pour se régénérer et abandonner ce dilemme oscillant dont elle ne peut sortir. Pour cela, elle doit se faire diagramme et inclure la virtualité du geste. Dans toutes les disciplines qui ont développé les théories structurales, pas seulement l'ethnologie ou l'anthropologie, mais aussi la psychanalyse, la linguistique et la sémiologie, la structure n'échappe pas à son origine cosmogonique. La grande fable du monde est cartographiée dans sa véracité imageante. Dans le nouveau discours structural, la structure se trouve toujours en position dominante et transforme l'opérationnel qui la constitue en ontologie.

La structure de Lévi-Strauss[25] est un système transformationnel prédictif, adéquat et homogène. Il est constitué d'éléments tels que la modification de l'un entraîne la modification de tous les autres. L'ensemble de ses éléments forment un groupe de transformations permettant de prévoir l'évolution du modèle si un de ses constituants était modifié. Il rend compte parfaitement de tous les faits observés. Lorsque Lévi-Strauss montre que les relations de parenté dans la société Kariéra forment un groupe de Klein, il n'en tire aucune conséquence importante[26]. Car le modèle mathématique de groupe ne dit rien sur le fonctionnement des relations parentales. Comme cela a été remarqué, la théorie des groupes est totalement inopérante dans ce contexte et n'apporte aucune connaissance supplémentaire. D'où la question : en dehors de son champ proprement mathématique, une structure algébrique peut-elle apporter quelque chose aux sciences humaines ? Certainement, mais à condition de ne pas s'arrêter à la structure elle-même. Peu importe de savoir si tel ensemble appartient à tel groupe ou non. Ce qui importe, c'est de comprendre que l'action de groupe fournit plus de résultats que le groupe lui-même. En mathématiques, la notion de groupe est féconde lorsqu'elle agit sur un autre ensemble pour en modifier l'organisation. C'est l'*action de groupe*, plus que la structure de groupe elle-même, qui sert à mettre en évidence de nouveaux classements et dessiner de nouvelles catégories. Dans les classifications cristallographiques, les groupes de symétrie sont tabulés. L'action d'un groupe de symétrie sur le tenseur des contraintes permet de simplifier la représentation matricielle et de dire par exemple si un cristal est piézoélectrique ou non. La richesse de la notion de groupe réside dans son caractère opératoire. Ce qu'enseignent les mathématiques est que pour être réellement efficace, cet opératoire doit agir localement, et non globalement comme dans la structure. C'est ce qui distingue structure et diagramme. La structure est une entité globale, le diagramme est une entité locale.

Le diagramme n'est pas le résultat d'un transcodage appliqué à un schème. Il peut se doubler d'un codage que lui aura assigné le locuteur, mais il sera toujours plus qu'un simple schéma parce qu'il exprime les efforts du virtuel qui sourdent sous la surface des diagrammes, dont les compositions de points, de lignes et de plans créent des tensions floues entre les éléments qui le composent. Les informations recueillies ne forment pas un espace clos. D'autres éléments s'accumulent toujours dans des lieux de réserve où ils pourront ou non s'actualiser. Il ne peut se réduire à une image, ni à un texte.

---

[25] C. Lévi-Strauss, *Anthropologie structurale*, p. 332. "La notion de structure en ethnologie", quinzième chapitre de *Anthropologie structurale* a d'abord été une communication en anglais *Social Structure* présentée au *Wenner-Gren Foundation International Symposium on Anthropology*, New York, en 1952, puis publié dans A.L. Kroeber ed., *Anthropology Today*, University of Chicago Press, 1953, p. 524-553.

[26] G.-G. Granger, *Essai d'une philosophie du style*, p. 264-267.

La structure de Piaget est un système de transformations qui répond aux critères « de totalité, de transformation et d'autoréglage. »[27] Le nom des éléments qui composent la structure varie selon l'approche adoptée, mais forment toujours un tout, une totalité qui porte elle aussi en fonction des contextes des noms différents (groupes, collectivités, ensembles, etc.). L'opératoire est assez semblable à celui du diagramme, puisqu'il se construit sur les relations que tissent les éléments et la totalité qui les renferme. La structure est divisible, ce qui n'est pas toujours le cas des diagrammes. Le caractère méréologique de la structure, l'interaction du tout et des parties s'interprètent aussi comme une forme duale de la relation entre l'intérieur et le bord d'un diagramme. Enfin, l'autorégulation garantit la cohérence de la structure, qui s'enrichit par le jeu des transformations qui la composent. La structure de Piaget invoque des processus adaptatifs étrangers à la notion de diagramme. La notion de structure est aussi très présente dans la théorie des esquisses de Charles Ehresmann. Une *esquisse* est un graphe multiplicatif (appelé aussi une *néocatégorie*) défini par des générateurs et des relations qui composent des diagrammes dans lesquels on pointe des sous-structures comme des cônes ou des cylindres. L'enjeu diagrammatique repose alors sur une combinatoire de ces entités sous-structurelles.

Parmi les sept critères que retient Gilles Deleuze pour caractériser le structuralisme[28], trois critères empruntent à Lacan les concepts qui les définissent. Le structuralisme, c'est d'abord la reconnaissance à côté de l'imaginaire et du réel, d'un troisième ordre plus profond qu'eux le symbolique. L'origine lacanienne du structuralisme repose sur le nœud fondateur où s'entrecroisent le réel, le symbolique et l'imaginaire, l'ordre RSI. La structure n'est selon Deleuze ni une Gestalt, ni une figure de l'imagination, ni une essence intelligible. « Il s'agit d'une combinatoire portant sur des éléments formels qui n'ont par eux-mêmes ni forme, ni signification... ». Il existe un élément irréductible au système qui circule intempestivement dans les séries. Cet élément paradoxal est sa propre métaphore et sa propre métonymie. Il est d'une autre nature que les éléments symboliques, les rapports différentiels et les singularités. Il est sans assignation ontologique. Il se caractérise par le fait et pour reprendre une expression lacanienne qu'il « manque à sa place » (ce n'est pas un objet). C'est la lettre volée d'Edgar Poe, le mot-valise de Lewis Carroll, le mana de Lévi-Strauss, le phonème zéro de Jakobson et « l'objet a » de Lacan. Cet élément manque aussi à sa ressemblance (ce n'est pas une image) et il manque à son identité (ce n'est pas un concept). C'est l'objet $= x$, dit Deleuze. La case vide qui corrélée au sujet d'un inconscient structurel, est en retour affecté des éléments immanents à la structure. C'est en ce sens que le structuralisme est aussi une praxis.

Ce sont des éléments qui se retrouvent dans les diagrammes, parce que le diagramme a un lien privilégié avec les structures profondes des catégorisations sémantiques qui ont été mises en évidence par les structuralistes. Mais il se distingue de la structure parce qu'il ne renvoie pas nécessairement à l'organisation architectonique du domaine considéré. La structure est un concept organisationnel, un espace élucidé et déjà découpé, une forme idéalisée de l'organisation d'une substance. Contrairement au diagramme, la structure a un caractère finaliste ou téléologique qui l'empêche d'accéder au statut d'objet scientifique. On lui reproche son manque d'objectivité.

Dans la structure, les éléments symboliques s'organisent en série. Ces séries se transportent d'une structure à l'autre. L'objet du structuralisme est de montrer comment un système de différences (e.g. une taxinomie zoologique) peut coder un

[27] J. Piaget, *Le structuralisme*, p. 6-7.

[28] G. Deleuze, "A quoi reconnaît-on le structuralisme ?", in *Histoire de la philosophie*, sous la direction de François Châtelet, p. 293-329.

autre système de différences (e.g. un ensemble de positions sociales) par projection du paradigmatique sur le syntagmatique. Il ne s'agit pas dans l'esprit des structuralistes d'un processus fonctoriel, mais d'un simple codage, une décalcomanie. Les codes inconscients relatifs aux relations parentales et culinaires de l'ethnologie structurale s'identifient par un jeu subtil d'associations aux mythes de la création du monde. L'ambition du diagramme est tout autre.

### Diagramme et différence

Le *différentiant* n'est pas une caractéristique de la structure mais du diagramme. C'est une conséquence des *diagrammes d'Oresme*[29]. Chaque élément du diagramme est déterminé par les relations différentielles qu'il entretient avec les autres. Ces différences sont obtenues par déploiement de singularités qui différencient l'espace et l'organisent en un espace diagrammatique. Ce que montre les diagrammes d'Oresme est que l'opposition du virtuel et de l'actuel se retrouve dans la différen(c|t)iation. Pour noter l'opposition métaphysique entre le virtuel et l'actuel, on introduit la différentiation avec un $t$ et la différenciation avec un $c$[30]. En tant que virtuel, le diagramme est différentié avec un $t$. En tant qu'actuel, il est différencié avec un $c$. Cette distinction est une caractéristique du diagramme, parce qu'elle est d'abord locale comme la différentiation, alors que la structure est une entité globale qui n'est pas nécessairement globalement différentiable. Les diagrammes de Nicolas Oresme sont l'illustration vivante de cette différence.

Dans le *Traité des configurations des qualités et des formes,* Oresme propose de représenter les grandeurs intensives par un diagramme. Après Guillaume d'Ockham et Jean Buridan, il ouvre un espace de réflexion philosophique et scientifique qui partant de la problématique du changement et de sa catégorisation par Aristote, aborde la question de la mesurabilité d'une qualité. L'application de sa théorie des configurations à la vitesse d'un mobile est singulièrement novatrice, car bien que ne connaissant pas le calcul différentiel ou intégral, Oresme donne en un diagramme une représentation de ce que nous appelons aujourd'hui une intégrale. Par ses diagrammes, Oresme déplace le statut ontologique des qualités et en particulier de la vitesse d'un mobile, qui ne doit plus être considéré comme une grandeur physique ayant une existence autonome, mais se trouve liée à la dérivation de l'espace, bien que le concept de dérivation n'existe pas encore.

Oresme montre que toute grandeur intensive (« toute intensité qui peut être acquise de façon successive ») est représentée par une ligne droite. La mesure d'une intensité est par conséquent la mesure d'une droite. Ainsi « toute qualité linéaire est représentée par la figure formée par une surface élevée perpendiculairement sur une droite du sujet. » Comme une surface correspond à cette qualité, « il faut la représenter par la figure de la surface qui lui correspond, ou par laquelle elle est représentée. La hauteur de cette surface correspond à l'intensité de cette qualité. »[31] Cela vaut pour toute qualité divisible, aussi bien pour une qualité d'un sujet que pour une qualité d'un objet, d'un milieu sensible ou non, comme l'éclat du soleil ou l'éclairement d'un milieu.[32]

---

[29]Nicolas Oresme (1325-1392), évêque de Lisieux et maître de l'Université de Paris. Les diagrammes d'Oresme ont été étudiés et commentés par Gilles Châtelet dans *Les enjeux du mobile.* Voir aussi Jean Celeyrette, "L'argumentation mathématique dans la physique d'Oresme", in Christophe Grellard, éd., *Méthodes et statut des sciences à la fin du Moyen-Âge*, Lille : Presses Universitaires du Septentrion, 2004, p. 201-215 et Jeannine Quillet (ed.) *Autour de Nicole Oresme*, Paris, Vrin, 1990.

[30]G. Deleuze, "A quoi reconnaît-on le structuralisme ?" *Op. Cit.*, p. 293-329.

[31]N. Oresme, *Tractatus*, I,v. in *Traité des configurations des qualités et des formes,* traduit par Pierre Souffrin et Jean-Pierre Weiss.

[32]*Ibid.* I,i.

Pour les vitesses d'un mobile, Oresme construit un diagramme dans lequel il place en abscisse le temps, en ordonnée le degré de vitesse (*gradus velocitatis*) et considère les surfaces engendrées sur ce graphe. Le degré de vitesse de Nicolas Oresme coïncide avec ce que nous appelons aujourd'hui la vitesse instantanée[33]. Les surfaces des diagrammes ne sont alors que des représentations des distances parcourues. L'actualité de la pensée d'Oresme est sa pertinence à penser la mesure d'une distance comme l'évaluation d'une surface. Elle témoigne de sa capacité à ouvrir un champ de réflexion vers de nouveaux espaces abstraits, non limités à l'espace physique. Elle ouvre un horizon sur lequel se profile la notion moderne d'espace des phases.

**Machines diagrammatiques**

Le diagramme se distingue de la figure par la machinerie qui le fait fonctionner. C'est une puissance machinique qui lui est propre. Il ne s'agit pas d'un simple codage ou d'une information rassemblée en un lieu singulier qui affirmerait le modèle, mais d'un déploiement de gestes virtuels. Le diagramme est un objet covariant, indépendant des référentiels, valable dans tous les mondes possibles. En ce sens, le diagramme véhicule sa propre sémantique. De la même manière que le personnage conceptuel plonge dans le chaos pour en remonter « les traits diagrammatiques d'un plan d'immanence »[34], une effectuation qui, chaque fois, revient à créer des concepts, de même, le diagramme plonge dans le virtuel pour que s'effectue l'actuation des composantes du réel. Les concepts sont déterminés par la topologie de la *variété d'immanence*. Sur une même composante, il y a une infinité de personnages conceptuels et une infinité de diagrammes qui s'enchevêtrent, s'associent en modifiant la surface dans un mouvement chaotique pour délimiter des régions d'intensité variable. Le mouvement créé par la pensée induit des recouvrements, des entrelacements qui se chevauchent les uns les autres et composent autant de variations de l'hypersurface. Dans cette dynamique, l'immanence n'est plus une donnée, mais un perpétuel devenir que révèle le moteur diagrammatique, un dévoilement progressif de l'Être.

De quoi est faite cette variété d'immanence ? Principalement de traits diagrammatiques qui font écho aux traits tensifs des concepts. « Les premiers sont des intuitions, les seconds sont des intensions »[35] La correspondance entre les deux se joue dans l'action médiatrice des personnages conceptuels. Pour que le diagramme fonctionne, il lui faut une machinerie qui lui soit propre : la combinatoire dans la diagrammatique lulliste, les règles de Feynman dans les diagrammes du même nom, la fonctorialité dans les diagrammes de Grothendieck, l'algèbre des racines dans les diagrammes de Dynkin, l'inférence dans les diagrammes de Venn et dans l'idéographie de Frege. Dans les diagrammes des sciences physico-mathématiques, il n'y a pas de chaînes syntagmatiques qui produiraient un « encodage territorial », il n'y a plus de références linguistiques, mais une singularité du topologique d'où naissent les productions d'univers. La recherche de *topiques* reste la principale motivation des repérages et des délimitations cartographiques.

Les diagrammes évoluent par mutations et recollements. Ce qui importe dans le cadre du diagramme, c'est précisément le bord, l'élément qui sert à recoller. La machine diagrammatique se nourrit des relations que le bord entretient avec le reste du diagramme. Dans les virtualités riemanniennes que nous avons vu plus haut, le

[33] P. Souffrin, "La quantification du mouvement chez les scolastiques. La vitesse instantanée chez Nicole Oresme", in J. Quillet, p. 63-83.

[34] G. Deleuze et F. Guattari, *Qu'est-ce que la philosophie*, p. 73.

[35] *Ibid.*, p. 42. Voir aussi Eric Alliez, *La signature du monde,* Edition du Cerf, 1993.

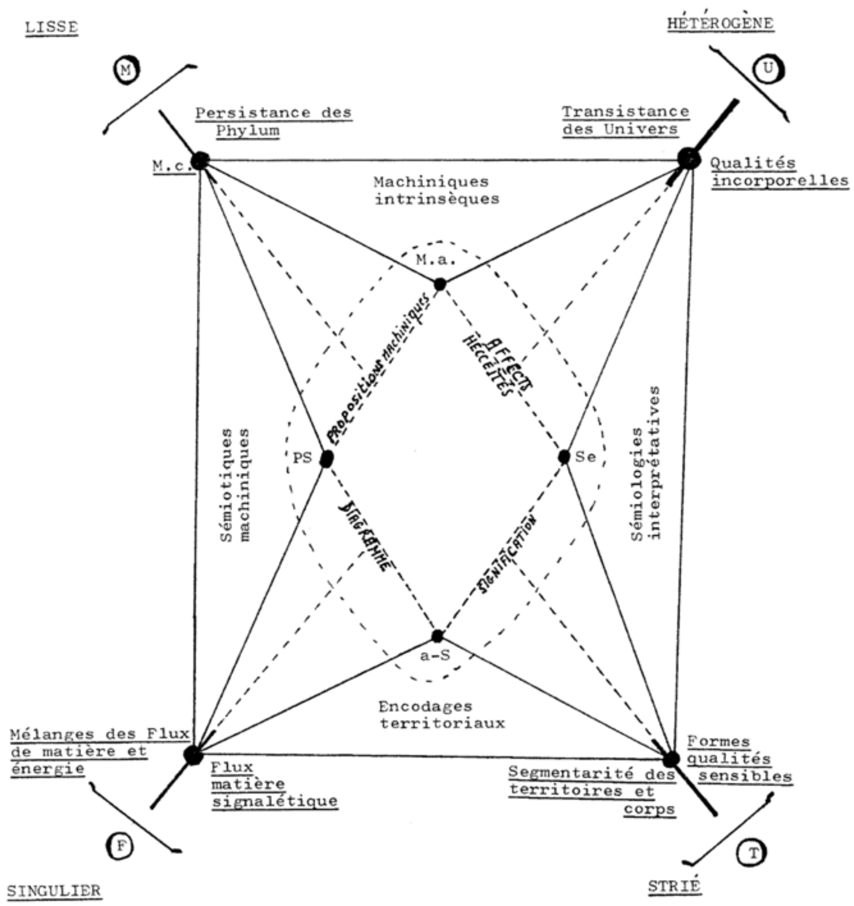



FIG. 3. F. Guattari, le noyau d'agencement, (in *Les séminaires de Félix Guattari* du 26 janvier 1982)

bord du diagramme qui enjoint les singularités en les reliant à l'infini découpe dans le plan complexe un territoire à partir duquel pourra fonctionner l'holomorphie. Dans les diagrammes de Feynman, les bords du graphe que constituent les sommets ou *propagateurs* jouent un rôle essentiel dans l'expression algébrique des éléments matriciels. En géométrie, la notion de recollement est centrale. Elle opère le plus souvent aux frontières et donne naissance comme dans la construction du tore par recollement des extrêmités d'un carré à des éléments de dimension supérieure. Représenter une bouteille de Klein par un simple carré, c'est toute la puissance du diagramme dont le moteur est ici le processus de recollement.

Le « noyau intentionnel »[36] de Jean-Toussaint Dessanti est aussi une machine diagrammatique. Si nous reprenons l'exemple des nombres compris entre 0 et 1, le noyau intentionnel est le moment où la conscience saisit son objet et vérifie dans un champ d'intuition non encore dominé l'attribution de la propriété à l'objet. « C'est le moment vide, dit Dessanti, où l'objet s'offre comme un *déjà* qui n'est *pas encore.* » C'est dans la démonstration de la propriété qu'un intervalle de nombres a la puissance du continu que l'on comprend sa nature diagrammatique. Car cette propriété topologique de l'intervalle [0, 1] se démontre par l'isomorphisme qui associe à cet intervalle la droite réelle toute entière. C'est un transport de propriétés qui

[36] J.-T. Dessanti, *Les idéalités mathématiques*, p. 92.

passe par la contraction de l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier à ce sous-objet qu'est l'intervalle [0, 1]. La machine diagrammatique est précisément cet isomorphisme dont le caractère fonctoriel assure le transfert de ses caractéristiques essentielles. La puissance du continu passe ainsi de l'ensemble des réels à l'intervalle fermé borné [0, 1]. Le noyau intentionnel n'est donc pas inscrit dans l'objet, mais dans le morphisme qui lui est associé et qui révèle ses propriétés intrinsèques. C'est ce morphisme et non la potentialité de l'objet lui-même qui permet « l'actualisation des évidences potentielles impliquées ». Le noyau intentionnel[37] de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

est un triangle. Il ne conduit à aucune autre figure. De même, le noyau intentionnel de l'équation

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{x^2}{v^2} = 1$$

est une ellipse dont la longueur des axes dépend des paramètres $u$ et $v$ et dont la forme ultime obtenue pour $u = v$ est un cercle. Ce cercle est l'*horizon* de l'ellipse, son minima d'entropie. L'horizon pour le triangle est le théorème de Pythagore qui se trouve co-posé dans les variations de l'angle $\alpha$ et obtenu lorsque cet angle vaut un angle droit ($\cos(\alpha) = 0$). Le triangle est rectangle et la mesure de son hypoténuse est une position singulière de l'expression algébrique, un *pôle d'idéalité*. C'est par le biais de ce pôle que l'objet algébrique nous dévoile les fragments de son être. Le *spectre d'idéalité* est formé des pôles singuliers des noyaux intentionnels. Il représente les voies d'accès privilégiées à l'objet. La machine diagrammatique a pour rôle principal de révéler les composantes de ce spectre.

Le « noyau d'agencement » de Félix Guattari[38] est comme le noyau de Dessanti une machine diagrammatique (voir fig. 3). Celle-ci est dédiée à la recherche de topiques et de cartographies et n'a aucune prétention à l'universalité. Elle s'appuie sur quatre référents dont les modes d'interaction forment le cœur machinique de ce noyau. Ces quatre référents sont les flux (F), les territoires (T), les univers (U) et les machines (M).

Ces modes interagissent deux à deux selon les axes du quadrilatère : un mode d'encodage territorial résulte du rapport entre les flux et les territoires, le triangle des sémiologies interprétatives naît de la recontre des flux et des univers, les sémiotiques machiniques articulent les flux et les machines concrètes (M.c.) et le triangle des machines intrinsèques croise la persistance des phylums et la transistance des univers. Les rapports pris deux à deux entre ces triangles donnent quatre nouveaux triangles définissant de manière topologique quatre nouveaux concepts.

Le phénomène de signification est le rapport entre les encodages territoriaux et les sémiologies interprétatives. Il se situe entre les chaînes syntagmatiques des figures a-signifiantes (a-S) et les emboîtements paradigmatiques et les traits sémantiques (Se). Les diagrammes forment le rapport entre les encodages territoriaux et les sémiotiques machiniques. Ils se situent entre les points signes (PS) et les figures a-signifiantes (a-S). L'affect remplit l'espace entre les sémiologies interprétatives et les machiniques intrinsèques « loin de l'équilibre ». Ces dernières croisées avec les sémiotiques machiniques définissent les propositions machiniques, c'est-à-dire « ce qui fait que derrière un énoncé scientifique esthétique, il y a une réalité de la relation. » C'est ce qui fait que derrière une constante comme la constante de la gravitation ou celle de Planck, il y a toujours un énoncé diagrammatique. Le noyau d'agencement est le cœur de tous ces éléments.

[37]Voir aussi les analyses de Maurice Caveing, in *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Vrin, 2004, p. 81 et suivantes.

[38]F. Guattari, *Les formations du noyau d'agencement*, Les séminaires de Félix Guattari, 26 janvier 1982.

Le carré a une autre signification. Le croisement des champs du possible et des champs des réels avec l'actuel et le virtuel définissent quatre référents du cycle diagrammatique. L'actuel est l'émanation des flux (champs des réels) et des phylums machiniques (champs du possible), tandis que le virtuel se décompose selon les territoires existentiels qui sourdent dans le champ des réels et les univers incorporels qui émergent des champs du possible.

Dans le diagramme guattarien, il n'y a pas de structure profonde, mais un plan de consistance. Le diagramme prend naissance sur les éléments de frontière du quadrilatère. Le sens se crée sur les points de fuite du diagramme. L'importance du noyau d'agencement tient au fait que les concepts développés autour de cette notion seront repris, souvent modifiés, dans *Qu'est-ce que la philosophie ?* qui paraîtra neuf ans plus tard.

Dans le même séminaire, Guattari montre comment ce diagramme s'applique aux catégories de Hjelmslev (substance-matière et contenu-expression) : le flux devient matière de l'expression ; les territoires, substance de l'expression ; les machines, matière du contenu et les univers, substance du contenu. Le diagramme s'applique aussi aux catégories de la psychanalyse freudienne pour définir la psyche, l'inconscient absolu et l'assujettissement.

Dans le noyau d'agencement, le diagramme se trouve à l'interface de la fonctorialité et de la virtualité, ce qui correspond justement aux fonctions essentielles du diagramme : donner du sens par l'actualisation diagrammatique et alimenter le sens par des transports fonctoriels. Si on se souvient que tout ceci ne vaut que localement, le phénomène de signification qui se trouve au centre du quadrilatère épistémique est pleinement à sa place topologique. L'unicité de cette signification est toujours donnée modulo des formes duales. Deux concepts en dualité ont localement la même signification.

## Les diagrammes de Dynkin

En 1946, le mathématicien russe Eugène Borisovitch Dynkin a proposé une représentation diagrammatique des algèbres de Lie semi-simples dans laquelle on associe à chaque algèbre un diagramme unique. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple si elle n'a pas d'idéal non trivial (autre que $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$). Elle est dite semi-simple si elle s'exprime comme le produit d'algèbres de Lie simples. La classification des algèbres de Lie semi-simples revient donc à la classification des algèbres de Lie simples. On classe ces dernières en quatre familles infinies ($A_r$, $B_r$, $C_r$, $D_r$) et cinq cas exceptionnels ($G_2$, $F_4$, $E_6$, $E_7$ et $E_8$). Chaque algèbre a une représentation matricielle. Toute matrice de l'algèbre s'exprime de manière unique par ses composantes dans la base de Cartan-Weyl. Cette base notée $(H^i, E^\alpha)$ avec $i = 1, ..., r$ et où $r$ est le rang de l'algèbre se construit par un procédé que nous ne détaillerons pas ici. Les matrices $H^i$ commutent entre elles et les matrices $E^\alpha$ sont les vecteurs propres de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{g}_0 = vect\{H^i, i = 1, ..., r\}$ engendrée par les matrices $H^i$. Elles vérifient l'équation

$$[H^i, E^\alpha] = \alpha_i E^\alpha$$

Le vecteur des valeurs propres $(\alpha_i)_{i=1,...,r}$ est appelé une *racine* de $\mathfrak{g}$. Ce sont ces racines qui servent à construire la matrice de Cartan et les diagrammes de Dynkin.

Un diagramme de Dynkin se compose de traits et de points. Les points $\{1, 2, ..., r\}$ représentent les racines $\{\alpha^{(1)}, ..., \alpha^{(r)}\}$ de l'algèbre et les traits qui relient les points entre eux symbolisent les valeurs prises par les éléments symétriques de la matrice de Cartan. Les éléments $A_{ij}$ de cette matrice sont obtenus en faisant le produit scalaire de la racine $\alpha^{(i)}$ par sa racine duale $\alpha^{(j)\vee}$. La matrice de Cartan est définie de la façon suivante. Les éléments diagonaux valent 2 ($A_{ii} = 2$) et les éléments en dehors de la diagonale se calculent par le produit scalaire $A_{ij} = (\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)\vee})$. La racine duale de la racine $\alpha$ est le vecteur $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Si les éléments symétriques sont nuls ($A_{ij} = A_{ji} = 0$) alors les points $i$ et $j$ ne sont pas reliés entre eux. Si les éléments symétriques valent $-1$ ($A_{ij} = A_{ji} = -1$), les points sont reliés par une ligne. Ils sont reliés par deux lignes si $A_{ij} = -2$ et $A_{ji} = -1$ et par trois lignes si $A_{ij} = -3$ et $A_{ji} = -1$. La flèche que l'on place sur une ligne simple, double ou triple indique la plus grande longueur $\left|\alpha^{(i)}\right| > \left|\alpha^{(j)}\right|$. Ainsi la classification des algèbres de Lie semi-simples est donnée sous une forme diagrammatique particulièrement concise (Voir fig. 4).

À titre d'exemple, construisons le diagramme de l'algèbre $A_2$, qui est l'algèbre $\mathfrak{sl}(2)$ associé au groupe spécial linéaire d'ordre 2. L'algèbre est de rang 2. Les deux générateurs linéairement indépendants sont représentés par les matrices

$$H^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad H^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le commutateur de ces matrices $[H^1, H^2] = H^1H^2 - H^2H^1 = 0$ est nul. Les trois matrices

$$E^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E^\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ont pour matrices transposées des matrices notées $E^{-\alpha}$,.$E^{-\beta}$, $E^{-\theta}$. Ces huit matrices $\{H^i, E^j\}$ forment un base de Cartan-Weyl. Le calcul des commutateurs des matrices prises deux à deux conduisent à l'expression des racines de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2)$. Des expressions du type

$$[H^1, E^{\pm\alpha}] = \pm E^{\pm\alpha}, \qquad [H^2, E^{\pm\alpha}] = 0$$

permettent de déduire les composantes des racines $\alpha = (1, 0)$ et $-\alpha = (-1, 0)$. En calculant tous les commutateurs, on voit que le système se composent de six racines $\phi = \{\pm\alpha,\ \pm\beta,\ \pm\theta\}$ pour $\beta = (-1/2; \sqrt{3}/2)$ et $\theta = \alpha + \beta = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Les produits scalaires $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 1$ et $(\alpha, \beta) = -1/2$ ainsi que les racines duales $\alpha^\vee = 2\alpha$ et $\beta^\vee = 2\beta$ donnent l'expression de la matrice de Cartan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de cette matrice, on construit son diagramme de Dynkin qui est composé de deux points reliés entre eux par une ligne unique. On généralise cette construction à une matrice de rang quelconque, ce qui conduit à une matrice de Cartan de $n$ lignes et $n$ colonnes et à un diagramme de Dynkin formé de $n$ sommets (voir fig. 4). On procède de la même manière pour construire les diagrammes des autres algèbres. Toutes les composantes du quadrilatère épistémique se retrouvent dans ces diagrammes. La fonctorialité se situe dans le passage de la catégorie des algèbres de Lie semi-simples à leurs représentations matricielle et diagrammatique. L'universalité résulte de la classification de ces algèbres. La dualité s'inscrit dans la parité des racines et la virtualité est ce qui rabat la pluralité et l'infinité des algèbres à une présentation finie.

C'est à partir des diagrammes de Dynkin que sont nées les généralisations aux algèbres de Kac-Moody et par mutations et déformations, l'extension à des problèmes nouveaux. A la fois dans les groupes de réflexion et les groupes de Coxeter, mais aussi dans les espaces homogènes où par modification et recomposition, les diagrammes se sont révélés des guides utiles pour la découverte de nouveaux horizons. On le voit dans le domaine diagrammatique, l'évolution des connaissances ne se fait pas par falsifications et corroborations[39], mais par tâtonnements et déformations. La lente maturation de la science n'est pas qu'une histoire de réfutations. Comme les définitions que posent patiemment le scientifique, le diagramme n'est pas un simple nom auquel on recourt pour abréger le discours. Il serait totalement erronné de ne voir dans les diagrammes de Dynkin qu'un nouveau nom de la matrice de Cartan. Le diagramme ne correspond ni à une définition nominaliste, ni à une définition essentialiste, mais plus justement un vaste réservoir de problèmes, ancré dans l'histoire, qui laisse deviner des formes de pensées capitales.

L'enjeu des diagrammes de Dynkin n'est pas de fournir une preuve irréfutable, mais de cartographier ce que sont les algèbres de Lie semi-simples. Sur quelques centimètres carrés, Dynkin montre qu'il en existe une infinité et que leur structure est contrainte. Il démontre aussi qu'il existe deux classes d'algèbres : celles qui sont associées aux diagrammes de la partie gauche de la figure et celles qui sont représentées sur la partie droite. Les premières sont en nombre infini et dépendent du nombre $n$, on les appelle les algèbres classiques. Les secondes n'ont que cinq modèles différents : ce sont les algèbres que l'on dit *exceptionnelles.* Ce simple partitionnement montre que la représentation diagrammatique offre plus de pertinence que l'irréfutabilité d'une preuve. Les diagrammes de Dynkin donnent à voir plus que de simples substituts de matrices. Leur signification a été prolongé à d'autres domaines. Ils sont aux algèbres de Lie ce que les diagrammes de Zuber-Ocneanu – que nous allons voir maintenant – sont aux modules des groupes quantiques.

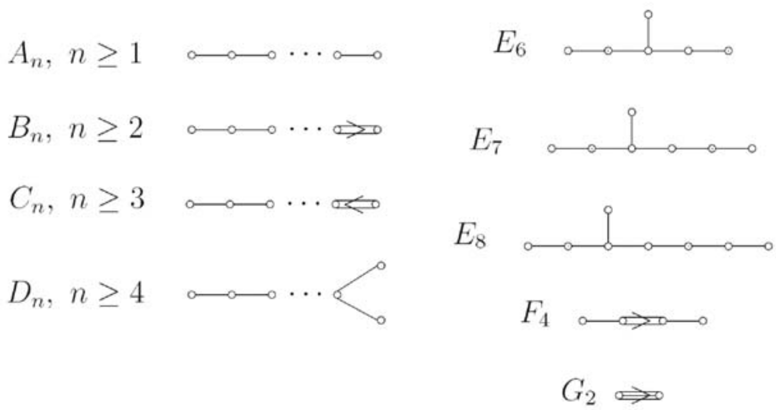



FIG. 4. Diagrammes de Dynkin

## Les diagrammes de Zuber-Ocneanu

Il faut toute la connaissance et l'expertise du spécialiste pour pénétrer la signification et la pertinence des diagrammes de Zuber-Ocneanu[40]. Le diagramme

[39]Voir K. Popper, *La logique de la découverte scientifique*, 1959 ; *Conjectures et réfutations,* 1963 et "La connaissance conjecturale : m solution au problème de l'induction", 1971 repris dans *La connaissance objective.*

[40]A. Ocneanu, "The classification of subgroups of quantum SU(N)", *Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics*, American Mathematical Society, 2002, pp. 133-159. A. Ocneanu, *Paths on Coxeter Diagrams : From Platonic Solids and Singularities to Minimal Models and Subfactors,* Notes prises par S. Goto, Editées par B.V. Rajarama Bhat, George A. Elliott, Peter A. Fillmore, AMS Fields Institute Monographs 13, 1999.

$E_6$ (voir la fig. 5) donne une partie de la classification des modules exceptionnels du groupe quantique $SU(4)_k$ qui est une déformation quantique pour les racines $k$-ièmes de l'unité du groupe de Lie simple spécial unitaire. Ce qui intéresse le philosophe dans ces diagrammes est leur singularité, la potentialité qu'ils ont de poser de nouvelles perspectives. Ces diagrammes sont, selon Ocneanu, des réseaux susceptibles de mettre en évidence un analogue plus général de ce qu'étaient, il y a un siècle, les groupes de Lie simples. Tous les diagrammes ouvrent un espace virtuel qui recompose la science. Jean-Bernard Zuber[41] a remarqué qu'il existe une dizaine de situations dans lesquelles les objets physico-mathématiques se classent selon les catégories $A$, $D$ et $E$ des diagrammes de Dynkin. C'est le cas des groupes de réflexion cristallographiques simplement entrelacés, des solides platoniciens, des singularités kleiniennes, de certaines orbivariétés (*orbifolds*), des sous-groupes du groupe quantique $SU_q(N)$ et de quelques autres. Les sous-groupes finis du groupe des rotations de l'espace $SO(3)$ se classent en deux familles infinies et trois cas exceptionnels. Les deux familles infinies associées aux classes $A$ et $D$ sont le groupe cyclique $C_n$ qui représente les rotations d'angle $2k\pi/n$ autour d'un axe donné et le groupe diédral $D_n$ qui se compose en plus des rotations précédentes de la rotation d'angle $\pi$ autour d'un axe orthogonal. Les trois cas exceptionnels sont les groupes de rotation des solides platoniciens : le groupe du tétraèdre associé à $E_6$, le groupe du cube ou de l'octaèdre associé à $E_7$ et le groupe de l'icosaèdre ou du dodécaèdre associé à $E_8$. Ainsi, les solides platoniciens forment en quelque sorte la plus ancienne classification $ADE$. Pour le philosophe, il y a une espèce de *naturalité* singulière dans ces correspondances qui pose à la fois le problème de l'universalité et de la dualité d'une infinité d'objets qui s'indexent sur la classification $ADE$.

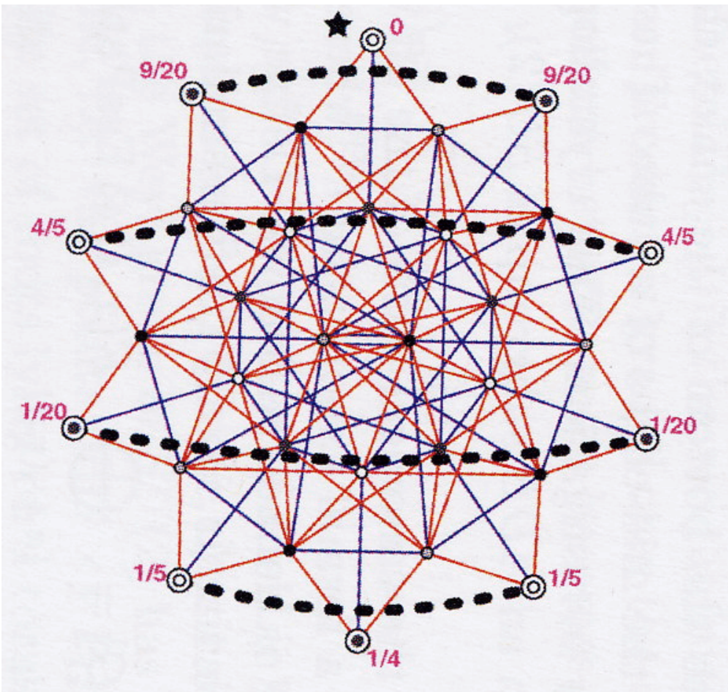



FIG. 5. Diagramme $E_6$, in A. Ocneanu, 2002

[41] J.-B. Zuber, "CFT, BCFT, ADE and all that", in *Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics*, AMS (2002) p. 233-266.

Comme dans le cas des diagrammes de Dynkin, la progression des connaissances physico-mathématiques ne se fait ni par *réfutation* des théories précédentes, ni par *accumulation* de lois, mais par *dévoilement du virtuel*. C'est ce que montre l'ordre diagrammatique. L'idée que le progrès scientifique est une révolution permanente dans laquelle toute nouvelle théorie réfute la théorie qu'elle veut remplacer dans un emboîtement sans fin est mise en défaut par ces exemples diagrammatiques. Le moteur du progrès est la machinerie qui opère au sein des diagrammes et qui révèle un logos. La théorie poppérienne qui veut que le progrès de la connaissance ne puisse se décrire qu'en termes de vérité et que la seule description possible du progrès consiste en l'élimination indéfinie de l'erreur repose sur un postulat non démontré : que l'erreur est le seul absolu que le savant connaisse. Ce que cherche le mathématicien n'est pas à éliminer l'erreur des théories précédentes, mais à produire sans cesse des théories qui tendent vers un universel dont l'horizon recule indéfiniment. Si certaines théories généralisent des résultats plus anciens et constituent un emboîtement selon des inclusions que définit l'universalité, toutes les théories ne se réfutent pas. La théorie des catégories et des topoi ne réfute aucune théorie, ni la théorie des ensembles, ni la théorie des types. C'est une théorie entièrement nouvelle qui n'a pas d'ancêtres dans l'histoire des mathématiques sur lesquels elle pourrait se construire. La croissance de la connaissance est liée à l'universalité et non à une mesure relative de la vérité d'une théorie. Ce n'est pas la *vérissimilitude* et l'approximation croissante des vérités qui règlent l'organisation hiérarchique des connaissances, mais les éléments du quadrilatère épistémique.

Ce que montrent les diagrammes et en particulier les diagrammes de Zuber-Ocneanu est que l'universalité, la dualité, la virtualité et la fonctorialité sont des acteurs qui disposent les objets dans l'ordre de la connaissance. Les développements asymptotiques ne sont pas les étapes de la conquête d'une connaissance scientifique sur lesquels s'indexe le niveau d'erreur et qui constitueraient l'organisation hiérarchique des connaissances, mais bien l'approche expérimentale d'une théorie physico-mathématique que l'on vérifie pas à pas. Ce n'est pas cette vérification qui va ordonner la théorie parmi les autres. C'est sa pertinence à s'insérer dans l'édifice du logos qui lui donne sa place. Le diagramme est donc relatif à un topos et à ce qui lui est associé à travers la machinerie diagrammatique, à savoir un logos.

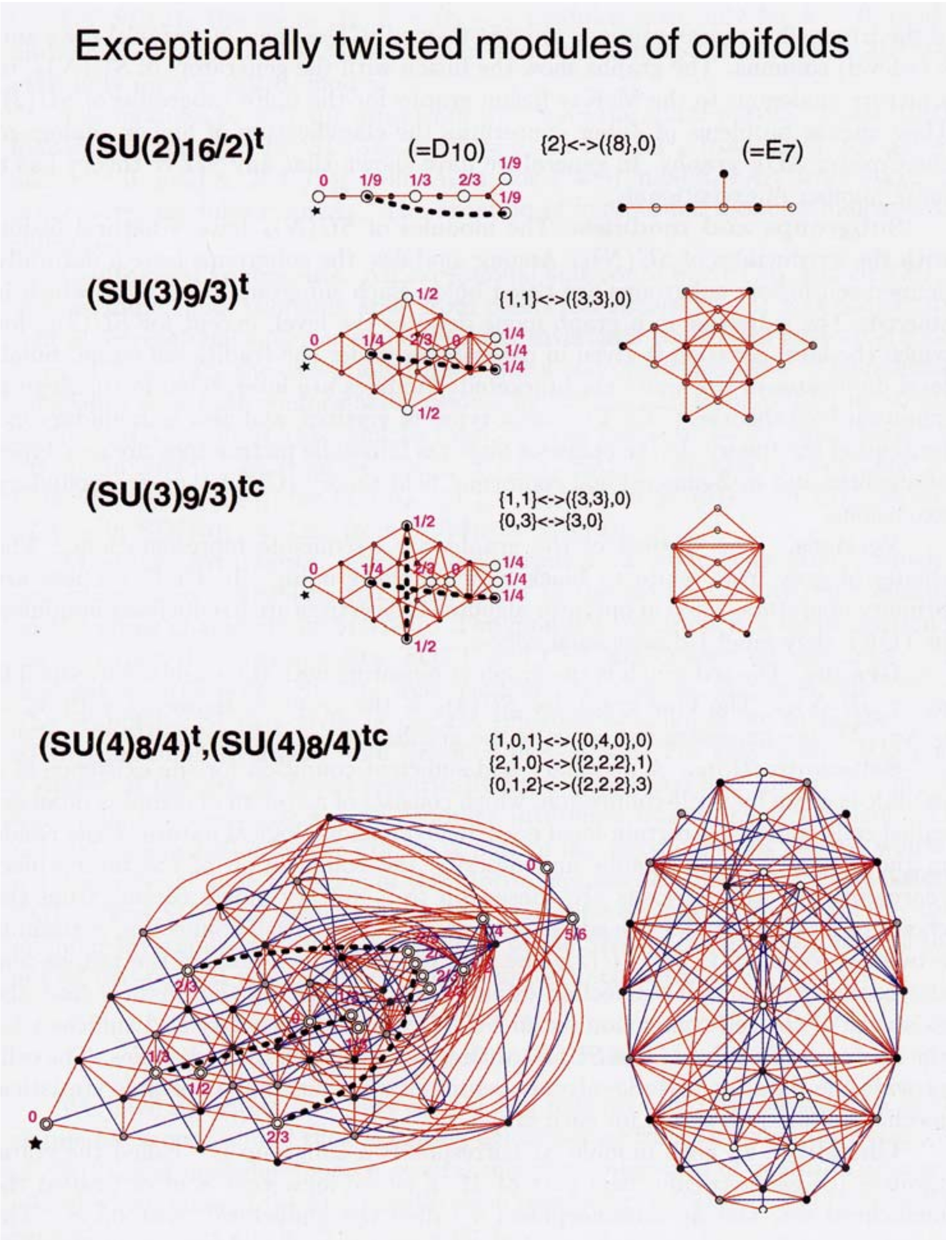



FIG. 6. Modules des orbivariétés, in A. Ocneanu, 2002

CHAPITRE 2

# Objets et catégories

Lorsqu'en 1942, Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane[1] donnent la première définition d'une catégorie mathématique, c'est sur des présupposés grecs qu'ils s'appuient. Référence aux catégories d'Aristote ou de Kant, la nouvelle théorie qui est née des besoins de la topologie algébrique pose non pas les catégories de l'être en tant qu'être, mais les catégories de l'être mathématique. La catégorie n'est plus une énumération des catégories de l'être, ou de l'être social ou communicationnel, organisée autour d'un noyau catégoriel principal, mais devient avec la définition mathématique une collection d'objets et de morphismes qui définit la catégorie pour elle-même. La substance n'étant plus au cœur de la théorie, il s'ensuit que le couple sujet-prédicat perd en importance. Si les catégories posent avec une acuité nouvelle la question de la concorde entre Aristote et Platon, de l'immanence et de l'univocité de l'être, elles modifient aussi l'ordre diagrammatique.

## Introduction aux catégories

La théorie mathématique des catégories n'est pas qu'un structuralisme logique ou une logique structurale des mathématiques, car l'idée de cette théorie n'est pas seulement d'étudier les structures mathématiques, mais de construire des passerelles entre catégories par le biais de foncteurs. Elle se développe autour de la notion de catégorie, qui malgré la simplicité de sa définition, s'avère une théorie d'une puissance universelle. Elle est actuellement une des théories du diagrammatique qui définisse de manière rigoureuse ce qu'est un diagramme[2]. Dans la pratique du mathématicien[3], une *catégorie* est une collection d'objets et de flèches (on dit aussi de "morphismes") qui vérifie des règles élémentaires de compositions entre flèches. Ces règles assurent que la composée de deux flèches consécutives existe toujours, que tout objet est relié à lui-même par une flèche identité et que la composition des flèches est associative. Cette définition est, on le voit, beaucoup plus générale que son équivalent grec aristotélicien des catégories. Elle ne dit pas qui sont les catégories, mais ce qu'est une catégorie. Elle donne une définition très *minimaliste* en termes d'objets et de flèches. Pour autant, la théorie des catégories n'est pas une théorie des structures mathématiques, mais plus une théorie ontologique des

[1] S. Eilenberg, S. Mac Lane. "Natural isomorphisms in group theory", *Proc. Nat. Acad. Sci.* 28 (1942), pp. 537-543.

[2] En termes mathématiques, un diagramme est une application $D$ d'un graphe orienté $\Gamma$ ayant un ensemble de sommets $S$ et un ensemble $A$ d'arêtes dans une catégorie $\mathcal{C}$ tel que les éléments de $D(S)$ sont des objets de $\mathcal{C}$, les éléments de $D(A)$ sont des flèches de $\mathcal{C}$ et si $a$ est une arête de $A$ ayant pour origine $u$ et pour but $v$, $D(a)$ est une flèche de $D(u)$ à $D(v)$, autrement dit $D(a) \in Hom(D(u), D(v))$. Le graphe est parfois appelé le *schéma du diagramme*. Sur ce sujet voir, A. Grothendieck, "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohoku Math. Journal*, 9 (1957), 119-221.

[3] Voir le livre de S. Mac Lane *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 2/1998. Pour des applications à l'informatique et à la logique, voir aussi le livre de Andrea Asperti et Giuseppe Longo, *Categories, Types and Structures*, MIT Press, 1991. Sur l'histoire des catégories, voir R. Krömer, *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory*, Birkhäuser (2007).

mathématiques. La flèche regroupe plusieurs sens. Elle peut être à la fois la relation d'un objet à un autre, la propriété d'un objet ou l'action d'un objet sur un autre. L'objet est complètement général, fini ou infini, vert, rouge ou sans couleur, actuel, virtuel ou hybride. La notion de catégorie correspond à un univers possible formé d'entités générales appelées objets. Le diagramme représente un fragment de cet univers.

Le diagramme est donc une vue ou un prélèvement d'actions qui ont lieu dans l'univers d'une collection d'objets. Les flèches qui composent le diagramme sont les éléments du moteur diagrammatique. Un diagramme n'est pas une catégorie, mais seulement un fragment de cette catégorie. Tous les objets et toutes les flèches de la catégorie ne sont pas nécessairement éléments du diagramme. La pertinence du diagramme est laissée à la liberté de celui qui le compose. Mais elle reste dans les limites du cadre catégoriel, ce qui impose dans certaines catégories, nous le verrons dans le chapitre sur les topoi, certaines contraintes, et en particulier, la stricte observance des règles de logique associées. Dans un diagramme commutatif, le but atteint ne dépend pas de l'itinéraire emprunté : il y a plusieurs chemins possibles pour atteindre un même objet. La commutativité assure la multiplicité des parcours pour un résultat unique. Tous les trajets d'un objet à un autre deviennent identiques et convergent vers une même composition de flèches. La flèche résultante assure que l'action ou la propriété de l'objet est établie indépendamment du trajet. La commutativité d'un diagramme est donc une modalité du fonctionnement opératoire des diagrammes, qui autorise la multiplicité des parcours. Pour un graphe donné et dans une catégorie $\mathcal{C}$ donnée, la classe des diagrammes est elle-même une catégorie[4]. Les morphismes peuvent s'étendre et se composer entre plusieurs diagrammes, justifiant les regroupements et les conjonctions de fragments d'univers. La catégorie des diagrammes est aussi le jeu de relations fonctorielles avec d'autres catégories[5].

### La concorde Platon-Aristote

La théorie des catégories ne peut se passer de la notion d'ensemble. Elle se construit indépendamment de la théorie des ensembles, qui se heurte au paradoxe de Russell : il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. En d'autres termes, il n'existe pas d'ensemble $S$ tel que : $X \in S$ équivaut à $X$ est un ensemble. En effet, considérons la propriété $P$ suivante. Un ensemble $X$ a la propriété $P$ si et seulement si $X$ n'est pas élément de lui-même ($X \notin X$). Cette propriété a bien un sens car on connaît des ensembles qui ont cette propriété : l'ensemble des nombres réels n'est pas élément de lui-même. Considérons l'ensemble $T$ dont les éléments sont exactement les ensembles $X$ qui ont la propriété $P$. La question se pose alors de savoir si $T$ a la propriété $P$ autrement dit de déterminer si $T \in T$ ou si $T \notin T$. Supposons que $T \in T$. Par définition de $T$, $T$ a la propriété $P$, autrement dit que $T$ n'appartient pas à lui-même. Donc $T \notin T$. Mais si tel est le cas, dire que $T$ n'appartient pas à lui-même, c'est dire que $T$ a la propriété $P$ et par conséquent que $T$ appartient à lui même ($T \in T$). Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction. Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles[6]. Cela signifie-t-il pour autant que le Tout n'existe pas ? Ce qu'affirment les mathématiques est que le Tout en tant

---

[4]Elle a pour objet les diagrammes eux-mêmes et pour flèches les morphismes $\Psi_i : D(i) \to D'(i)$ associé à chaque sommet $i \in \Gamma$, tels que pour chaque arête $a$ de source $i$ et de but $j$, $D'(a) \circ \Psi_i = \Psi_j \circ D(a)$.

[5]Voir aussi René Guitart, "Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?", *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*, XXIII-2 (1982) 115-148.

[6]La notion d'*hyper-ensembles* (*hypersets*) permet de construire une théorie consistante équivalente à ZFC dans laquelle le paradoxe de Russell n'existe pas. Sur cette question voir Peter Aczel, *Non-Well-Founded Sets,* CSLI Lecture Notes No. 14, Stanford (1988).

qu'ensemble de tous les ensembles, c'est-à-dire construit par la procédure récursive des multiples inclusions de toutes les parties d'ensembles n'existe pas. Arrivé à ce point, on peut se demander ce qui interdit l'existence de l'ensemble de tous les ensembles. Est-ce lié à la complexité de prendre en considération toutes les relations inclusives de toutes les parties d'ensembles ? Ou bien est-ce que le paradoxe ne vient pas du fait que la démonstration ne distingue pas les *éléments* d'une part et les *ensembles* d'autre part, que la relation "être élément de" ($\in$) ne porte que sur des éléments, et la relation d'inclusion "être contenu dans" ($\subset$) ne porte que sur des ensembles. Si on tient compte de cette nuance, une démonstration similaire conduit au même résultat, car considérer l'ensemble $T$ revient à assimiler *élément* et *ensemble*, puisque $T$ est un ensemble formé d'éléments qui sont eux-mêmes des ensembles et donc que l'existence de l'ensemble de tous les ensembles est contradictoire. D'un autre côté, le langage ne s'oppose pas à l'existence du Tout, de l'Univers. Si le Tout existe, ce Tout est nécessairement l'ensemble de tous les ensembles, donc le Tout n'existe pas. A moins que le Tout ne soit pas un ensemble, auquel cas, le Tout existe indépendamment du paradoxe de Russell. Appelons $\Omega$ ce Tout dont les parties sont des familles quelconques d'ensembles. Parmi les parties de $\Omega$, il y en a qui sont définissables de manière logique. On les appelle des *classes*[7]. Une partie $A$ de $\Omega$ est une *classe* s'il existe une formule d'une variable libre $\varphi(x)$ et éventuellement des paramètres tels que $\forall x\ (x \in A \Longleftrightarrow \varphi(x))$. Parmi ces classes, certaines correspondent à des ensembles. Ce sont les classes $A$ définies par une formule de la forme $x \in a$. Une telle classe est assimilée à l'ensemble $a$. On dit aussi que la classe $A$ est un ensemble. Certains axiomes de Zermelo et Fraenkel comme l'axiome de la réunion, des parties ou le schème de remplacement énoncent que certaines classes sont des ensembles[8]. Il y a des classes qui ne sont pas des ensembles, c'est le cas du Tout $\Omega$ et de la classe de tous les ensembles $S$. Pour se soustraire au paradoxe de Russell, Zermelo-Fraenkel posent l'axiome de fondation qui énonce que tout ensemble non vide $x$ possède un élément disjoint de $x$.

$$\forall x\ \{x \neq \varnothing \rightarrow \exists y\ (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)\}$$

Cet axiome implique qu'aucun ensemble n'appartient à lui-même ($\forall x\ x \notin x$) et qu'il n'existe pas de suite d'ensembles décroissante pour la relation d'appartenance $\in$, c'est-à-dire de suite $(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ telle que $x_{n+1} \in x_n$. Par conséquent, aucun ensemble n'a la propriété $P$ ci-dessus et on ne peut atteindre le grand Tout par une suite d'inclusions d'ensembles. Pour affirmer l'inexistence d'un étant total, comme le fait Alain Badiou[9], il faudrait montrer que tous les étants sont des ensembles, c'est-à-dire qu'il existe une formule d'appartenance qui les définit. Il suffit alors d'appliquer le paradoxe de Russell pour affirmer qu'il ne peut exister un étant total, c'est-à-dire un étant de tous les étants, puisqu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Mais si les étants ne sont pas des ensembles, le problème reste entier.

[7]Pour construire une classe, on utilise le *schème de compréhension*. Si $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une formule dans laquelle la quantification ne porte que sur des variables ensembles, alors il existe une classe $A$ telle que $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A \Longleftrightarrow \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$. L'existence de l'ensemble vide est une des conséquences importantes de ce schème.

[8]L'axiome de la réunion affirme que la réunion des éléments d'un ensemble est encore un ensemble. L'axiome des parties dit que la classe des parties d'un ensemble est encore un ensemble. Le schème de remplacement est une famille d'axiomes qui exprime le fait que si une formule $\varphi(x, y)$ est une relation fonctionnelle de deux variables libres $x$ et $y$ (c'est-à-dire définit une fonction $\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \rightarrow y = y'$ notée $y = \varphi(x)$) alors pour tout ensemble $a$, il existe un ensemble $b$ dont les éléments sont les images par $\varphi$ des éléments de $a$ : $\forall a\ \exists b\ \forall y\ \{y \in b \leftrightarrow \exists x\ (x \in a \wedge \varphi(x, y))\}$

[9]A. Badiou, *Logiques des mondes*, p. 165.

La théorie des catégories considère la *collection* de tous les ensembles, de tous les groupes, de tous les objets d'une espèce donnée. Elle se trouve donc confrontée au problème de l'inexistence de l'ensemble de tous les ensembles. C'est un biais que d'introduire la notion de *collection* dans la définition d'une catégorie. En réalité, il y a deux façons de résoudre le problème. La première est de considérer la théorie de Gödel-Bernays des classes et des ensembles en utilisant le schème de compréhension pour construire les classes. La seconde qui a été proposée par Grothendieck est de se placer dans un univers suffisamment vaste pour pouvoir considérer tout ensemble de cet univers[10]. En quelque sorte, l'univers correspond aux limites du monde. Pour définir la théorie des catégories, on se place dans un univers donné $\mathcal{U}$, et on appelle "petits ensembles" les éléments de $\mathcal{U}$. Il existe alors un ensemble $S$ qui est l'ensemble de tous les "petits ensembles". On évite ainsi le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles. En supposant l'*axiome de l'univers* (Tout ensemble appartient à un univers) et en se donnant un univers $\mathcal{U}$ fixé, on établit une équivalence entre les univers de Grothendieck et la théorie de Gödel-Bernays en prenant pour "ensembles" les éléments de $\mathcal{U}$ et pour "classes" les sous-ensembles de $\mathcal{U}$. Les ensembles considérés par les mathématiciens sont toujours des "petits ensembles". Une "petite catégorie" est une catégorie dont les objets sont des (petits) ensembles (et non des classes).

La théorie des catégories n'est toutefois pas un substitut à la théorie des ensembles. Nul mathématicien ne peut se passer de la notion d'ensemble. Un groupe, une algèbre, des symboles, des nombres sont toujours des ensembles. Même si tous les objets d'une catégorie ne sont pas des ensembles, il est dans la vie du catégoricien impossible de se dispenser d'employer les concepts de la théorie des ensembles. Les objets mathématiques employés couramment sont des objets dont la structure dépend du concept d'ensemble. Il en va de même des catégories. Au demeurant, la théorie des catégories réussit ce tour de force qui consiste à définir un sous-objet sans employer le concept d'inclusion. Elle se passe d'un concept essentiellement ensembliste.

Peut-on affirmer que la théorie des ensembles contraint à des orientations platoniciennes et la théorie des catégories à des options aristotéliciennes ou leibniziennes ? C'est la thèse que défend Alain Badiou. « Est platonicienne la reconnaissance de la mathématique comme pensée, intransitive à l'expérience sensible et langagière, dépendante d'une décision, faisant place à l'indécidable, et assumant que tout ce qui est consistant existe. »[11] Badiou retient « trois déterminations essentielles de l'ontologie ensembliste : une théorie localisée de la différence, l'unicité du vide et l'indécidabilité comme point de fuite immanent. » Ce sont ces questions que nous voudrions discuter maintenant.

L'intensité se situe entre deux catégories d'origine aristotélicienne, la qualité et la quantité. Un ensemble est défini en *compréhension* selon sa qualité et en *extension* selon sa quantité. Il oscille donc entre deux pôles catégoriels. D'un côté, la formule logique qui définit son appartenance à l'ensemble, sa participation à un regroupement d'éléments tous identifiables, ce qui exclut, notons le au passage, les objets indiscernables de la physique quantique. De l'autre, une énumération de la population de l'ensemble, des individus parfaitement actualisés. Ces catégories ne sont pas récursivement cumulatives. Il n'est pas possible de constituer un Tout $\Omega$ par inclusions successives. De la même façon que l'ensemble de tous les ensembles

---

[10] La définition mathématique d'un univers est celle-ci. Un *univers* est un ensemble $U$ tel que (1) $x \in y$ et $y \in U \Rightarrow x \in U$. (2) $I \in U$ et $\forall i \in I,\ x_i \in U \Rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \in U$. (3) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in U$. (4) $x \in U$ et $f : x \to y$ est surjective $\Rightarrow y \in U$. (5) $\mathbb{N} \in U$.

[11] A. Badiou, "Platon et/ou Aristote-Leibniz. Théorie des ensembles et théorie des Topos sous l'œil du philosophe", p. 65.

n'est pas un ensemble, la qualité de toutes les qualités n'est pas une qualité. La théorie des ensembles ne connaît que le multiple actuel. A l'inverse, l'objet des catégories est une entité hybride qui suppose plusieurs régimes d'existence, des composantes actuelles et virtuelles. Il ne s'indexe pas sur ces deux catégories, que sont la qualité et la quantité, mais se définit comme intensité par la connexion singulière des morphismes qui le relient. Considérée comme une catégorie dérivée issue du croisement de la qualité et de la quantité, cette intensité représente partiellement la puissance singulière de la substantialité et contraint par conséquent à des orientations aristotéliciennes.

A l'opposé, la localisation intelligible est un thème platonicien que nous reconnaissons dans la théorie des topoi. Ces topoi sont des catégories particulières qui ont l'étrange propriété d'imposer leur logique. Pour des topoi booléens, la logique est classique. Pour des topoi non booléens, la logique est intuitionniste. C'est la structure du topos, sa place dans l'univers et son agencement qui détermine sa logique canonique. En théorie des ensembles, ce sont les axiomes de la théorie qui assure sa cohérence. En aucun cas, l'axiomatique ensembliste ne peut décider de la validité du tiers exclu. D'où les difficultés liées à l'axiomatisation et connues sous le nom de théorèmes d'incomplétude de Gödel. (1) Toute théorie axiomatisable (même rudimentaire) est incomplète. (2) Toute théorie axiomatisable suffisamment développée ne permet pas de prouver sa propre cohérence. La conséquence est que dans tout système formel consistant contenant un minimum d'arithmétique ($+$, $\times$, $\forall$, $\exists$ et les règles associées), il existe une formule indécidable (ni $\varphi$, ni non $\varphi$ ne sont prouvables). Autrement dit, les systèmes complets sont rares. C'est donc le choix des axiomes qui règle la complétude d'une théorie. Dans la logique des prédicats du premier ordre, l'indécidable est une conséquence de la quantification, car la logique des prédicats est un calcul propositionnel auquel on ajoute les quantificateurs $\{\forall,\ \exists\}$ et il est bien connu que le calcul des propositions est décidable. L'univers ensembliste n'impose pas la logique classique comme conséquence naturelle de sa propre théorie. Ce n'est pas parce qu'un élément appartient ou n'appartient pas à l'ensemble que toute formule de la théorie des ensembles suit le tiers exclu. D'ailleurs, la logique intuitionniste se réfère à des ensembles, tout comme la logique classique. La notion de décidabilité existe aussi en théorie des topoi. Un objet $A$ dans un topos $\mathcal{E}$ est dit *décidable* si, pour des variables $a$ et $b$ de type $A$, on a identité ou non de $a$ avec $b$

$$\models (a = b) \ \vee \ \neg(a = b)$$

On démontre que dans un topos booléen tout objet est décidable, bien qu'en logique classique, il existe des formules indécidables. La notion catégorielle de décidabilité porte sur les objets du topos alors que la notion ensembliste porte sur les formules logiques et exprime la loi du tiers exclu

$$\models \varphi \ \vee \ \neg\varphi$$

Un topos, quel qu'il soit, booléen ou non, distingue toujours le vrai du faux. L'objet $\mathbf{2} = \{v\} \cup \{f\}$ formé du vrai et du faux est toujours décidable.

Il s'ensuit que l'intelligibilité du lieu parce qu'elle dicte dans les topoi la validité du tiers exclu est une orientation platonicienne. Mais la distinction que l'on trouve dans le livre gamma de la *Métaphysique* entre le principe de non-contradiction et le principe du tiers exclu ouvre à la théorie des topoi des orientations aristotéliciennes. Plus encore : l'unicité du vide n'est pas une détermination essentielle de l'ontologie ensembliste platonicienne. L'existence du vide repose sur le *schème de compréhension*, qui est une famille d'axiomes exprimant que pour tout ensemble $a$ et pour toute propriété $P$ exprimable dans le langage $\{\in, =\}$, l'ensemble des éléments de

$a$ qui vérifient $P$ existe[12]. Le schème de compréhension a plusieurs conséquences immédiates. Il montre que l'intersection de deux ensembles existe et que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas[13]. Pour démontrer l'existence du vide, il suffit d'appliquer l'axiome de compréhension à la formule $x \neq x$. L'unicité du vide est une conséquence de l'*axiome d'extensionalité*[14]. Dans un topos, les axiomes de la théorie des ensembles sont des théorèmes (à l'exception de l'axiome de l'infinité et de l'axiome du choix)[15]. En particulier, on démontre l'axiome de remplacement d'où découlent le schème de compréhension et l'axiome d'extensionalité. Par conséquent, dans un topos, le vide existe et est unique. L'unicité du vide n'est pas une détermination essentielle de l'ontologie ensembliste qui contraindrait à des orientations platoniciennes. La théorie des ensembles interdit l'existence de clones. C'est ce qu'affirme l'axiome d'extensionalité : deux êtres identiques, formés des mêmes éléments ne peuvent être distincts. L'existence de plusieurs vides n'est possible que dans des espaces où n'existe pas que des ensembles, mais des collections plurielles. Et encore, pas dans toutes les "grandes" catégories (i.e. non ensemblistes).

Il n'est donc pas facile de partager ensembles et catégories selon des orientations platoniciennes ou aristotéliciennes sans contradictions. La question de la reconnaissance de la mathématique comme pensée n'est pas une ligne de partage. Reste que les catégories sont les relations conceptuelles les plus universelles possibles, qui reflètent les modes et les formes de l'être.

### L'objet et le lemme de Yoneda

L'objet est assurément l'être mathématique le plus indéfini qui soit. En théorie des catégories, il n' a pas de définition précise. L'objet est tout être mathématique. Il ne suppose pas d'être simple et sans parties. Ce n'est pas une monade leibnizienne. C'est une entité qui peut être composée, avoir des parties, des sous-parties, être même un élément de frontière. L'objet se compose de l'objet actuel qui ne se réduit pas nécessairement à la chose et de l'objet virtuel, éventuellement vide. Il ne peut être pensé sans différenciation, c'est-à-dire sans les différences qu'il recouvre. C'est pourquoi il est associé aux morphismes qui le définissent et le localisent. Il n'a pas de structure interne : tout ce qui peut être dit des objets d'une catégorie peut être dit avec le langage des morphismes ou des flèches de cette même catégorie.

Pour comprendre l'interprétation du *lemme de Yoneda*, commençons par rappeler différentes propositions mathématiques. On se donne une catégorie $\mathcal{C}$ localement

[12]Plus précisément, soit $\varphi$ une formule et $x$ une variable, le schème de compréhension associé à $\varphi$ et à $x$ est la clôture universelle de la formule

$$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi)$$

L'ensemble $b$ est noté $b = \{x \in a \mid \varphi\}$. C'est un sous-ensemble de $a$ dont l'existence est assurée par les axiomes de Zermelo-Fraenkel. Remarquons que si $\varphi$ est la formule $x = x$, cela ne définit pas un ensemble.

[13]La démonstration est la suivante. Soit $a$ tel que $\forall y\ (y \in a)$. Appliquons l'axiome de compréhension à l'ensemble $a$ et à la formule $x \notin x$. Il existe alors un ensemble $b$ tel que

$$\forall x\ (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin x)$$

En particulier pour $x = b$, on a $b \in a \wedge b \notin b$. Comme $b \in a$ est vraie puisque $a$ est l'ensemble de tous les ensembles, on a donc $b \in b \leftrightarrow b \notin b$. Ce qui est contradictoire.

[14]L'axiome d'extensionalité énonce que deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux. Ce qui s'écrit de manière formelle

$$\forall x\ \forall y\ \{\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\}$$

Autrement dit, si on note $x \subset y$ pour l'expression $\forall z\ (z \in x \rightarrow z \in y)$, la formule ci-dessus exprime que $x \subset y$ et $y \subset x$.

[15]L'axiome de l'infinité (il existe un ensemble infini est vrai dans de nombreux topoi et en particulier dans les topoi de Grothendieck). L'axiome du choix n'est pas nécessairement vrai. Quand il est vrai, il contraint la logique du topos à être classique.

petite et un objet $X$ de $\mathcal{C}$. La catégorie duale $\mathcal{C}^{op}$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en renversant le sens des flèches. La catégorie des préfaisceaux est quant à elle définie comme étant la catégorie exponentielle $Ens^{\mathcal{C}^{op}}$, notée $\widehat{\mathcal{C}}$ ou $Fct(\mathcal{C}^{op}, Ens)$ dont les objets sont les foncteurs $F$ de $\mathcal{C}^{op}$ dans la catégorie des ensembles $Ens$ et les flèches sont les transformations naturelles[16] entre foncteurs. Pour chaque objet $X$ de $\mathcal{C}$, l'application $h_X : \mathcal{C} \to Ens$ qui à un objet $A$ associe l'ensemble[17] $Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ est un foncteur covariant. Ce foncteur, appelé le foncteur *hom*, représente les points de vue de $X$ dans la catégorie $\mathcal{C}$. Si $F$ est un foncteur quelconque de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles, le lemme de Yoneda établit que pour chaque objet $X$ de $\mathcal{C}$, les transformations naturelles de $h_X$ vers $F$ sont en bijection avec les éléments de l'ensemble $F(X)$, ce qu'on écrit sous la forme suivante

$$Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X)$$

Le plongement

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}} \\ X & \longrightarrow & h_X \end{array}$$

qui a un objet $X$ de la catégorie $\mathcal{C}$ associe le foncteur $h_X$ est pleinement fidèle[18]. Ce foncteur est appelé le *plongement de Yoneda*. Il exprime que l'on peut toujours considérer la catégorie $\mathcal{C}$ comme une sous-catégorie de $\widehat{\mathcal{C}}$ (i.e. *plongée* dans $\widehat{\mathcal{C}}$). Autrement dit, les objets de $\mathcal{C}$ sont vus comme des foncteurs de $Fct(\mathcal{C}^{op}, Ens)$ c'est-à-dire comme des points de vue $h_X$ de l'objet $X$. Mais il n'y a pas d'équivalence entre les catégories. Pour cela, il faut de plus que le foncteur soit essentiellement surjectif[19]. Une troisième formulation du lemme de Yoneda est donnée dans le cas particulier où le foncteur $F$ de la première formulation est un autre foncteur Hom $h_Y$. Dans ces conditions, les morphismes de l'objet $X$ vers l'objet $Y$ sont isomorphes aux transformations naturelles de $h_X$ vers $h_Y$,

$$Hom(X, Y) \cong Nat(h_X, h_Y)$$

Le lemme de Yoneda exprime donc l'équivalence

$$X \cong Y \Longleftrightarrow h_X \cong h_Y$$

Cette équivalence établit que deux objets $X$ et $Y$ sont isomorphes si et seulement si ce sont les mêmes objets vus de tous les points de vue. En somme, le lemme de Yoneda illustre l'idée que sous couvert de l'Un-multiple, l'Être est relation. Il est donc faux de dire que le lemme de Yoneda est antideleuzien.

Observons encore que ce lemme nous oblige à une interprétation ensembliste des relations. Il contourne les difficultés ontologiques en les rabattant sur la catégorie des ensembles. En géométrie algébrique, le mathématicien manipule des objets appelés *schémas*. A priori, il ne sait pas comment définir le produit de deux schémas, qui est en quelque sorte un objet virtuel. Mais ce produit devient un objet pleinement

---

[16] Rappelons la définition d'une transformation naturelle. Si $F$ et $G$ sont deux foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, une transformation naturelle $t : F \to G$ est une collection de morphismes $t_X : F(X) \to G(X)$ pour $\forall X \in \mathcal{C}$ telle que $\forall f : X \to Y$

$$G(f) \circ t_X = t_X \circ F(f)$$

[17] $Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ est un ensemble car on suppose que $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite. Si tel n'était pas le cas, le lemme de Yoneda rendrait isomorphe un ensemble $F(X)$ et une classe $Fct(\mathcal{C}^{op}, Ens)$.

[18] Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est pleinement fidèle si pour tout objet $X$, $Y$ de $\mathcal{C}$, l'application $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ est bijective.

[19] Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est *essentiellement surjectif* si tout objet de $\mathcal{C}'$ est isomorphe à un objet de la forme $F(X)$. On dit que le foncteur $F$ est une *équivalence de catégories* si $F$ est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

existant par le lemme de Yoneda qui en fait par plongement un foncteur dans la catégorie des ensembles. Ontologiquement, le plongement de Yoneda équivaut au processus d'actualisation.

Le *lemme de Yoneda* impose donc l'union du sujet et de l'objet. Il dit de manière mathématique qu'un objet est équivalent à l'ensemble des points de vue que nous portons à cet objet. Il établit donc une équivalence entre l'*objet objectivé* et l'*objet subjectivé*. En somme, il donne une démonstration à l'idée que l'objet et le sujet ne peuvent pas se prendre séparément. L'ob-jet parce qu'il participe au sujet fonde la possibilité d'objectiver le monde, mais aussi et de manière équivalente de le subjectiver. Il ne s'agit pas de relativiser le contenu à la forme, de réduire l'objet aux relations qu'il entretient avec le système, mais bien de distinguer l'objet mathématique par les morphismes qui le pointent. Morphismes qui peuvent d'ailleurs s'appliquer à l'objet en un mouvement autoréférent pour définir l'objet et ses sous-objets, mais aussi l'ensemble de ses points de vue. En théorie mathématique des catégories, la méréologie prend une allure singulière. Une catégorie est définie comme une collection d'objets et de morphismes entre ces objets. L'objet est un tout et le sous-objet est défini par des morphismes. Le lemme de Yoneda prolonge l'être de l'objet par les actions que sont les morphismes qui l'entourent et le définissent. L'agir est consubstantiel à l'être.

L'objet mathématique est objet de connaissance[20]. Il désigne aussi bien la chose que sa représentation mentale. Il n'y a pas de nécessité de distinguer l'objet de sa création immanente produite par la connaissance. Bien que ce qui est effectivement connu (*objectum*) se distingue de ce qui est à connaître (*objiciendum*). L'opposition objectif-subjectif n'a pourtant pas lieu d'être. C'est une des fabuleuses conséquences du lemme de Yoneda que de considérer les points de vue comme autant de morphismes qui partent de l'objet. Ce n'est pas que l'objet s'objective dans le sujet, que les déterminations du transcendant passent dans l'image immanente, mais simplement que l'objet est partiellement représenté par un sujet. Maintenant l'objet ne signifie pas seulement la partie devenue objet mais l'ensemble de ses points de vue, en tant que le sujet vise non une représentation, mais l'ensemble de ses représentations, même s'il est incapable de les représenter toutes à la fois. C'est un espace abstrait qui témoigne de la complexité de l'objet. En outre, il ne faut pas confondre les points de vue de l'objet et ses degrés d'objectivation, qui sont souvent posés comme une approche graduelle de l'objet subjectivé et qui se résolvent à un faisceau de quelques morphismes. En somme, l'objet devient l'égal d'un ensemble d'objets indicés par ses points de vue $A = (A_x)_{x \in I}$. On voit de nouveau l'importance de l'*indexation* dans la réflexion mathématique. Vu du sujet, l'objet est un objet indicé par ses points de vue, qui est l'égal dans sa catégorie duale à l'objet vu du point de vue de l'objet. Lorsque l'objet est un objet matériel, la théorie est triviale, mais lorsque l'objet est transcendant, les points de vue se dédoublent en point de vue réel et en point de vue virtuel. L'objet est toujours un sur-ensemble de l'objet connu. Ce qui m'est donné n'est qu'une partie de l'objet à connaître, car le potentiel ne s'exprime jamais en totalité. Toutes les réalisations du monde virtuel ne s'actualisent pas en même temps. Par conséquent, l'objet est toujours une multiplicité. Le connaissable est alors ce qui advient ou ce qui est advenu, mais aussi ce qu'il adviendra. Un objet est toujours un objet intemporel, parce qu'il incorpore tous les temps, comme d'ailleurs la connaissance qui lui est associée. L'inconnaissable se réduit au non-intelligible.

---

[20] La notion d'objet est étendu par Grothendieck (SGA 4-1 p. 119) à des objets indicés appelés *ind-objets* et à la notion duale de *pro-objets*. Soit $C$ une catégorie sur un univers $U$ donné, un pro-objet est un foncteur $\varphi : I^\circ \to C$ où I est une catégorie filtrante essentiellement petite appelée la catégorie d'indices et $I^\circ$ désigne la catégorie opposée. Le dual est le ind-objet $\Psi : I \to C^\circ$.

L'objet est donc pris ici dans son sens husserlien comme un terme universel qui désigne n'importe quoi. Il inclut les fonctions de Frege et les états de chose de Wittgenstein. Il désigne toute chose qui est signifiable par un nom. "Chose" est pris ici dans son sens le plus général, le plus bolzanien[21] et pas seulement au sens de corps matériel. L'objet est à la racine de l'arbre taxinomique. C'est l'objet initial de la catégorie des choses. Une entité est un objet qui a un Être dans le monde. La plupart des philosophes pense que tout objet est une entité[22]. Les non-entités seraient par conséquent des objets sans Être. Il est en général admis que si elles existent, elles n'existent qu'en très petit nombre. La démonstration consiste à dire que si l'objet ne se réduit pas à son Être tout entier, il y a dans l'objet un sous-objet qui représente ce qui n'est pas l'Être de l'objet. Ce sous-objet est par conséquent une non-entité. Cette démonstration est contestable car lorsque le sous-objet devient un objet il reçoit alors le statut d'objet avant de devenir une non-entité et la démonstration revient à son point de départ. On est conduit à une régression qui se referme sur elle-même. Une autre façon de prendre le problème est de considérer que les entités sont des instanciations d'objets. Les racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$ qui sont les nombres $+1$ et $-1$ sont des entités qui ne sont pas dans le même espace que les racines de l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui sont les complexes imaginaires $+i$ et $-i$. L'équation est une représentation des objets que sont les racines de cette équation. Mais en même temps cette équation est un objet qui représente d'autres objets. Par conséquent, c'est un point de vue sur les objets que sont les racines, donc un morphisme. C'est ce morphisme qui subjective les objets terminaux que sont les racines. De ce point de vue, les racines deviennent les objets objectivés et l'équation un objet subjectivé, alors que dans le raisonnement précédent, les racines étaient elles-mêmes les objets subjectivés par la résolution de l'équation. La question n'est donc pas de savoir comment une représentation $A$ représente un objet $B$, mais comment construire l'objet $A$ à partir de ses points de vue $(A_x)_{x \in I}$. C'est toute la question du lemme de Yoneda. L'objet est saturé par l'ensemble de ses points de vue.

Les objets non-existants (un cercle carré, une montagne d'or, une vertu verte, un "pied de vigne qui fleurirait précisément maintenant", un cygne noir, une chimère, une licorne, etc.) n'ont pas de réalité dans le monde physique ou de représentations associées. L'image que j'ai d'un cercle carré est une image instable qui fait alterner comme dans un film les photogrammes du cercle et du carré. Cette instabilité m'empêche de considérer l'objet comme une figure géométrique unique. D'un point de vue mathématique, je peux toutefois considérer l'objet $A = \{\bigcirc, \square\}$ qui est une paire formée d'un cercle et d'un carré. Puis le munir de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui identifie les cercles et les carrés. L'ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ ainsi obtenu est un objet $B$ qui définit le cercle carré. Une chimère[23], un animal composé de la tête

[21]On sait que pour Bolzano, une chose est "tout ce qui peut être un objet de représentation" : « Par le mot chose, je n'entends pas ici seulement celles qui possèdent une existence objective, indépendante de notre conscience, mais aussi celles qui existent simplement dans notre représentation, et cela de nouveau à titre d'individus (...). En un mot donc j'entends par "chose" tout ce qui peut être un objet de notre faculté de représentation. » in B. Bolzano, *Gesamtausgabe*, 2, 5A, cité et traduit par F. Nef, *L'objet quelconque*, Vrin, 1998, p. 123. Voir aussi l'ouvrage de Jacques Laz, *Bolzano, critique de Kant*, Paris : Vrin (1993) et celui de Jocelyn Benoist, *Représentations sans objet. Aux origines de la phénoménologie et de la philosophie analytique.* Paris : Presses Universitaires de France (2001).

[22]Ce n'est pas toujours partagé par l'ensemble des philosophes. Meinong pense que la majorité des objets ne sont pas des entités. Alexius Meinong, *Théorie de l'objet*, trad. de l'allemand par Jean-François Courtine et Marc de Launay, Paris : Vrin (1999).

[23]Sur la question des chimères, voir aussi les travaux de Christian Lair et René Guitart sur les diagrammes localement libres. R. Guitart, "Introduction à l'analyse algébrique I et II", *Mathématiques et sciences humaines*, 96 (1986) 49-63 et 97 (1987) 19-45.

d'un lion, de la queue d'un dragon et d'autres parties hétérogènes, est un objet impossible, bien que signifiable. Elle est pour Marsile d'Inghen dans la "cinquième dimension du temps"[24].

Bolzano a longuement étudié les *objets inexistants* « qui n'appartiennent pas à la chaîne des causes, qui n'existent pas dans l'espace et le temps, mais qui subsistent dans l'univers comme un certain *etwas* »[25]. Toute représentation subjective a une représentation objective en soi qui est son sens ou sa matière, qui a la dimension d'une idéalité et qui est indépendante de la subjectivité qui l'introduit. La question que pose Bolzano est de savoir si toute représentation objective entendue en ce sens est associée à un objet effectif. Parmi les représentations d'objets inexistants, il distingue les représentations sans objets (un cercle carré), de celles qui n'ont pas d'objet existant (une montagne d'or). Les premières sont associées à des représentations imaginaires et les secondes à des représentations réelles. Il est possible de concevoir une montagne d'or même s'il n'en existe pas. En revanche, le cercle carré et son dual – le carré rond – ne peuvent pas être associés à une figure géométrique effective. On voit que ces objets existent virtuellement (donc réellement), que l'on peut en donner une définition formelle. Pourtant, ce que nous mesurons n'est que leur probabilité d'actualisation dans notre monde. Il ne s'agit pas de référence. Il est possible de construire une image dans un casque de réalité virtuelle d'un cercle carré : il suffit que l'image soit celle d'un carré sauf dans le voisinage de l'angle fixé par les yeux de l'utilisasteur où l'image est celle d'un fragment de cercle. Lorsque ses yeux se déplacent, l'image partielle du cercle se déplace en suivant ses propres mouvements substituant l'image (partielle) d'un cercle à celle du carré. Dans ce dispositif, nous visualisons ni un cercle ni un carré, mais une représentation dynamique simultanée des deux objets : il s'agit bien d'un cercle carré. Mais ce qui gêne dans l'appellation de cercle carré, c'est la connotation absurde et illogique de l'expression elle-même. Mais si nous considérons l'objet $B$ précédent, cet objet n'est qu'un simple représentant d'un monde dans lequel les cercles sont équivalents aux carrés, et qui justifie pleinement d'appeler "cercle carré" les objets de ce monde. L'objet obtenu a une existence qui est de même nature que celle des nombres imaginaires. Considérons par exemple le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$. Ce nombre est-il un objet inexistant ? Mathématiciens et philosophes ont l'habitude de le manipuler bien qu'il ait de nombreuses représentations. Assimilons l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ au plan des réels $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous identifions $i$ comme le couple de réels $(0, 1)$ par l'isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ qui a tout complexe $z = x + iy$ associe le couple $(x, y)$. Cet isomorphisme lui assigne une existence réelle comme le couple de deux nombres. Mais si nous considèrons le complexe $z = re^{i\theta} = r \cos\theta + ir \sin\theta$, nous construisons une autre représentation de $z$ en identifiant les nombres $r$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta$ avec l'angle défini par les formules $\cos\theta = x/r$ et $\sin\theta = y/r$. L'objet "nombre complexe" a donc des représentations équivalentes[26] sous la forme de couples $(x, y)$ ou $(r, \theta)$ dans lesquelles chaque élément est lié à l'autre par la relation qui construit cet objet, de la même manière que l'objet cercle carré a une représentation en couple $(\bigcirc, \square)$ modulo la relation qui lie ces éléments entre eux. Reste qu'il n'existe pas de figure géométrique du cercle carré, si ce n'est une figure a deux faces dont l'avers représente un cercle et le revers un carré. L'existence n'est pas une propriété de fait ni une propriété logique qui assimilerait l'objet à sa teneur chosique. L'objet mathématique existe s'il est possible de le construire avec

[24]Marsile d'Inghen distingue cinq dimensions du temps : le présent, le passé, le futur, le possible et l'impossible. Alain de Libera se demande si cette cinquième dimension du temps contient les objets apatrides au sens de Meinong. A. de Libera, *La référence vide*, p. 104.

[25]B. Bolzano, *Grundlegung der Logik, issenschaftslehre*, § 19.

[26]Un objet a donc plusieurs noms au sens frégéen. G. Frege appelle nom « toute manière de désigner qui joue le rôle d'un nom propre » *Sens et dénotation*, p. 103.

les outils des mathématiques elles-mêmes. C'est toute la question des ensembles boréliens. On sait que la mesure de Lebesgue $\lambda$ est invariante par translation et qu'elle prolonge la fonction longueur définie sur les intervalles ($\lambda([a,b[) = b-a$). La tribu des boréliens $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a la puissance du continu

$$card(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$$

La tribu complétée $\widehat{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ introduit beaucoup plus d'ensembles

$$card(\widehat{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}) = 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{C}} = card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$$

mais l'inclusion dans l'ensemble des parties de la droite réelle $\widehat{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est stricte. Ce qui signifie qu'il existe des sous-ensembles de la droite réelle qui ne sont pas $\lambda$-mesurables. On ne sait pas écrire explicitement un tel sous-ensemble, mais on sait le construire[27]. Pour autant, l'objet existe bien en tant que sous-ensemble d'un fragment de droite. Dire que dans ce fragment, il existe un sous-ensemble que nous ne savons pas mesurer n'a rien d'évident.

### Ontologie des catégories

Si les mathématiques sont l'ontologie comme le prétend Alain Badiou, alors les catégories de l'Être doivent s'identifier aux catégories mathématiques. Mais si on réfute cet argument, si les mathématiques ne s'identifient pas à l'ontologie, si elles n'ont pas pour objet de penser l'être générique, elles affirment toutefois philosophiquement quelque chose qui pose à chaque moment l'ontologie des mathématiques en regard du dire de l'Être. Dès lors, il n'est pas déraisonnable de supposer que les catégories mathématiques sont conciliables avec les catégories de l'Être. Engagées dans l'histoire, les catégories, puisqu'elles concernent un processus, ont d'abord côtoyé la logique avant de se rapprocher des topoi. Proches de la logique aristotélicienne, elles s'en écartent avec Kant qui dissocie la logique de la métaphysique. La question généalogique de l'origine des catégories est par delà le divers des interprétations le point d'ancrage de la signification catégorielle. C'est ce qui conduit à distinguer des catégories de pensée, de jugement, de l'Être, de prédication et de langage. Kant pose que la recherche des catégories doit se faire selon un fil conducteur et non de manière arbitraire comme le fait Aristote[28]. Ce principe directeur, il le trouve dans le jugement. Avant lui, Aristote pose les dix catégories[29] comme les genres suprêmes des termes non subordonnés les uns aux autres qui peuvent être affirmés des différentes réalités, irréductibles à un universel suprême et unique. Ce sont donc des notions qui ne peuvent être subsumées sous une attribution plus haute. Ce en quoi, on retrouve le modèle de la théorie des ensembles, mais cette fois, non pas construit sur la relation d'inclusion, mais sur la relation d'attribution. On pourrait alors argumenter que le Stagirite trouve un fil conducteur aux catégories dans l'attribution.

Le rapport de la théorie mathématique des catégories à l'ontologie passe par la mise en relation de la notion d'objet au caractère composite de chaque être composé d'une forme (l'acte) et de matière (la puissance). La formulation moderne des

[27] La construction d'ensembles non $\lambda$-mesurables dépend de l'axiome du choix. R. Solovay, *Notices Amercian Mathematical Society*, 12 (1965) 217.

[28] E. Kant, *Critique de la raison pure*, p. 95 (III, 119).

[29] Plusieurs auteurs ont souligné que dans l'œuvre même d'Aristote, le nombre des catégories varie. Dans la *Métaphysique* (N2, 1089 b20), il semble qu'il n'y ait que trois catégories, les substances, les passions et les relations. La liste généralement reconnue est celle de l'Organon (*Catégories*, 2a) où Aristote distingue dix catégories : la substance (un homme, un cheval), la quantité (de deux coudées), la qualité (le blanc, un grammairien), la relation (le double, la moitié), le lieu (au Lycée, au Forum), le temps (hier, l'an dernier), la position (il est assis), la possession (il est chaussé, il est armé), l'action (il coupe, il brûle), la passion (il est coupé, il est brûlé). On a aussi fait remarquer que l'ordre dans lequel les catégories apparaissent n'est pas toujours respecté.

objets n'oblige pas à ne considérer que des corps formés de matière. Cela pose depuis le Moyen Age des problèmes métaphysiques difficiles. Car si l'être spirituel n'a pas de corps, donc pas de matière, son existence diffère de son essence (forme et matière). Cette existence appartient donc à l'accidentel. Elle ne subsiste pas par elle-même et n'est donc pas indépendante. L'existence de l'être est par conséquent dépendante de sa substance qui est la catégorie principale du modèle aristotélicien, sauf si l'on considère, comme le font certains auteurs, l'existence de "matière spirituelle", c'est-à-dire une matière acorporelle. La considération des objets au sens catégoriel a toutefois l'avantage de ne pas surdéterminer le problème de l'existence et de bien séparer les questions de théologie des questions ontologiques. Les positions philosophiques varient selon que l'on fait de la matière ou de la forme le principe d'individuation de l'être. Les matérialistes soutiennent que la matière est le principe d'individuation. Pour Duns Scot, c'est l'*haecceitas*, qui est un principe formel particulier et non la matière qui décide de l'individuation. Comment l'ontologie mathématique peut-elle approcher ces questions ? Est-ce que au-delà de tout formalisme, au-delà de toute considération de surface, la question posée par les mathématiques, et en particulier par la théorie des catégories, n'est-elle pas en profondeur la même question que posent les philosophes ? Toute ontologie trouve une interprétation catégorielle comme collection d'objets et de morphismes. Même la position de Guillaume d'Ockham qui rejette l'alternative de la matière et de la forme, et pour qui l'Être est individuel en raison du fait même d'être un Être, car dans la réalité n'existe que ce qui est individuel, trouve une interprétation catégorielle. Les objets sont des morphismes en vertu des morphismes de l'identité qui les définit. L'individuel se réduit à la considération de ces morphismes autoréférents. La position de Thomas d'Aquin privilégie aussi l'action de morphismes pour démontrer que l'existence (l'*esse*) n'est pas un élément de l'Être, mais un acte de l'Être individuel qui n'est déterminé par aucune forme de genre ou d'espèce. Tout ce qui est réel est aussi individuel.

Il y a donc des analogies structurelles entre les catégories de l'Être et les catégories mathématiques. La fonctorialité généralise ces analogies. C'est elle qui permet à Kant de transposer la table des jugements à la table des catégories et aux théologiens de passer d'un monde à un autre. Si les dix catégories ne visent que le monde physique cela semble indiquer que les prédicats utilisés pour décrire le monde sensible ne s'appliquent pas au monde supérieur. Ce qui embarrasse les théologiens est qu'ils ne peuvent pas appliquer aux êtres divins un prédicat construit à partir d'un ensemble de constatations fondées sur le monde sensible d'ici-bas. On retrouve les mêmes difficultés dans la philosophie platonicienne et néoplatonicienne lorsqu'il s'agit de passer du monde sensible au monde des intelligibles. Pour l'homme du Moyen Age, le passage du monde sensible au monde non-sensible se fait par analogie. Le monde réel physique est régi par une analogie *per attributionem* qui relève de l'un-multiple. Par analogie, l'objet passe d'un monde à un autre en respectant à la fois une quasi-identité et une certaine multiplicité en s'adaptant et en se différenciant dans chaque secteur d'application. La mesure du rapport de l'unité et de la multiplicité a le caractère d'un jugement. La méthode est générale. Elle s'appuie sur le principe fonctoriel des catégories mathématiques qui consiste à transporter par analogie – ce qu'on pourrait appeler le *foncteur analogique* – des règles, des lois ou des principes d'une catégorie à une autre.

Ce que montrent les mathématiques aujourd'hui est que les catégories ne sont pas affaire de logique, alors que pour Aristote les catégories sont « en nature et en nombre, les sujets et les éléments des arguments dialectiques. »[30] On peut donc se demander si le système des catégories contribue de quelque façon à la théorie de la démonstration. Quel est le rôle de ces catégories et si elles aident à construire des démonstrations ? Si l'on s'en tient à une lecture stricte du texte d'Aristote, on doit en déduire que le devenir des termes d'une proposition doit évoluer selon les catégories, parce que dans la *Métaphysique* il est dit que ce quelque chose qui devient un quelque chose, par quelque chose et à partir de quelque chose, devient selon chaque catégorie[31]. Et aussi que le Même, l'Autre et le Contraire varient selon chaque catégorie[32]. Les *prédicables* (l'accident, le genre, le propre et la définition) sont des notions que l'on retrouve dans chaque catégorie. Si le sujet se rapporte à une catégorie, une démonstration correcte ne pourrait se faire qu'en employant des prédicats dans cette même catégorie. Il s'agirait donc de donner des règles de construction d'une démonstration en indexant un ensemble de prédicats à un topos. Pour qu'une proposition (si $p$ alors $q$) soit valable, il faudrait que l'antécédent et le conséquent appartiennent à la même catégorie. Et si l'opposé du conséquent appartient aussi à cette même catégorie, nous avons les prémisses d'une algèbre. Mais Aristote ne mentionne pas une aire catégorielle de prédication, ni ses commentateurs (Porphyre, Boèce, Simplicius, Plotin) sauf peut-être Galien[33]. Dans l'interprétation logiciste du système d'Aristote, la substance première est l'ultime sujet de la prédication. Les vérités de base sont de la forme "A est B" ou "A est non B". Les autres vérités dérivent ou dépendent de ces vérités de base. L'existence de substances premières suppose l'existence de substances secondes aussi bien dans l'univers des mots que dans l'univers des choses. Pour Aristote, l'accident est ce qui est présent dans la substance. L'attribut n'est pas *dans* le sujet comme un accident, mais est affirmé du sujet si bien que l'attribut peut être considéré comme une substance seconde. Les genres et les espèces sont forcément des substances secondes car elles dépendent existentiellement des premières. Cette distinction pose la question de la possibilité d'une prédication sur des propositions dont le prédicat et le sujet sont des substances secondes aussi bien pour les mots que pour les choses.

L'erreur de Trendelenburg[34] est de considérer la table aristotélicienne des catégories comme une classification des parties du discours : la substance correspond au substantif ; la qualité, à l'adjectif ; la quantité, aux noms des nombres ; la relation, à toutes les formes comparatives et relatives ; le temps et le lieu correspondent aux adverbes de temps et de lieu ; et les quatre dernières catégories correspondent aux verbes actifs, passifs et intransitifs. Il ajoute le mouvement (*kinèsis*) au nombre des catégories, comme unité de l'agir et du pâtir. On le voit nettement, le fil conducteur qui préside à l'établissement des catégories est grammatical. Il est toutefois difficile de soutenir une telle thèse, car il n'y pas de trace chez Aristote d'une telle classification des parties du discours, ni de cette dualité entre les catégories de l'Être et les catégories de langage. Bien plus, le cas de la relation et des déictiques met en défaut les conclusions de Trendelenburg. Cette thèse a toutefois été reprise plus récemment

---

[30] Aristote, *Topiques*, I,9, 104a. Voir aussi P. Aubenque, *Le problème de l'être chez Aristote*, PUF, 1962. M. Heidegger, *Traité des catégories et de la signification chez Duns Scot*, Gallimard, 1970.

[31] Aristote, *Métaphysique*, Z, 7, 1032a.

[32] Aristote, *Métaphysique*, Δ, 10, 1018a.

[33] J. Barnes, "Les catégories et les *Catégories*" in *Les catégories et leur histoire*, édité par O. Brun et L. Corti, p. 76.

[34] Fr. A. Trendelenburg, *Geschichte der Kategorienlehre*, 1846. Sur l'usage critique d'Aristote chez Trendelenburg, voir les articles de Claudio Majolino, Jean-François Courtine et Denis Thouard, in *Aristote au XIX^e siècle*, édités par Denis Thouard, Cahiers de philologie, Presses Universitaires du Septentrion, Lille, 2004.

par Benveniste[35] qui affirme que les prédicats d'Aristote « correspondent non point à des attributs découverts dans les choses, mais à une classification émanant de la langue même ». Aristote aurait même emprunté sans le voir le tableau des catégories aux catégories de la langue. Inconsciemment, dit Benveniste, « Aristote a pris pour critère la nécessité empirique d'une expression distincte pour chacun des prédicats. Il était donc voué à retrouver sans l'avoir voulu les distinctions que la langue même manifeste entre les principales classes de formes, puisque c'est par leurs différences que ces formes et ces classes ont une signification linguistique. Il pensait définir les attributs et les objets ; il ne pose que des êtres linguistiques : c'est la langue qui, grâce à ses propres catégories, permet de les reconnaître et de les spécifier. »[36] Il suffit de revenir à cette notion d'attribution exposée au début de l'*Organon* pour comprendre que même si l'on admet que les limites de notre monde sont les limites de notre langage, les catégories de l'Être ne sont pas subordonnées les unes aux autres contrairement aux éléments de linguistique qui sont nécessairement subordonnés entre eux par une syntaxe. La table des catégories de pensée n'est pas le reflet de la table des catégories de langue. Même s'il ne faut pas négliger l'entrelacement des êtres et des mots.

S'il existe une onto-théo-logie des catégories dans les traditions antiques et médiévale, il existe aussi une *onto-po-logie* qui naît de l'expression diagrammatique des topoi. Les catégories représentent avec plus ou moins de précision le diagramme des relations et leurs modes de fonctionnement que constitue dans l'Être-là la réalité en train de se former ou de se transformer. A toute théorie catégorielle est associée une diagrammatique. Si nous appelons *engramme*, l'Être du diagramme, la question se pose de savoir dans quelle catégorie échoit l'engramme ? Est-ce une substance ? Ou bien s'agit-il d'une notion nouvelle comme celle de *précatégorie*, notion proposée par Hartmann[37] qui décrit la *Urkategorie* de la relation. Mais alors où se situe la précatégorie par rapport à l'*Ens* et aux transcendantaux ? L'analogie fonctionne-t-elle entre précatégories et catégories ? Si les catégories sont la représentation diagrammatique des modes de l'Être-là dans le monde physique, peut-on dire que les précatégories ont aussi par analogie ou par fonctorialité une représentation diagrammatique dans leur propre monde ? Ces questions relèvent de la topologie, de leur ordonnancement dans un espace abstrait.

La forme diagrammatique de la proposition est aussi une question d'onto-pologie. La signification de la copule (*et*), l'entrelacement du sujet et du prédicat, des verbes et des noms se rapportent au diagramme en ce qu'ils participent à la machinerie productive de sens que véhicule le diagramme. Dans toutes les figures de la logique aristotélicienne, le diagramme est formé des trois lettres qui caractérisent l'universalité ou la particularité affirmative ou négative des majeures, mineures et des conclusions. *Barbara* est l'expression mnémotechnique latine du trigramme AAA. En ce sens, la diagrammatique est une théorie des formes de la signification par delà le monde physique, car le diagramme est la forme la plus appropriée pour anticiper un monde au-delà des sens, un monde qui pointe dans le monde sensible au travers de singularités.

Dans la philosophie deleuzienne, la diagrammatique, loin de se réduire à une polarisation catégorielle, est une analytique libérée des contraintes taxinomiques. Lorsqu'il traite de la question du signe, Deleuze distingue plusieurs types de sémiotiques : une sémiotique générale ou générative renouvelée, une sémiotique transformationnelle et une sémiotique diagrammatique. La répartition des approches

[35] E. Benvensite, "Catégories de pensée et catégories de langage" in *Problèmes de linguistique générale 1*, p. 63-74.

[36] *Ibid.* p. 70.

[37] E. von Hartmann. *Kategorienlehre,* Leipzig : H. Haacke (1896).

transformationnelles qui sont inclues dans la diagrammatique n'est pas claire. Car la théorie des catégories ne fonctionne que par transformations, qui sous les noms variés de morphismes, foncteurs ou transformations naturelles, déplient la machinerie opératoire de la théorie. Il s'ensuit que la distinction entre la composante transformationnelle et la composante diagrammatique tombe. Elle n'induit pas ce partage singulier entre l'empirique et le transcendantal. Le diagramme véhicule sa propre composante transformationnelle, et c'est bien là toute la différence entre le diagramme et le schéma. Non seulement avec le schéma kantien, mais aussi avec le figural. Dans son acception la plus générale, l'objet absorbe le signe, qui n'a pas le statut qu'il a connu. L'objet remplace définitivement le signe. Le découpage n'opère pas en composantes transformationnelles, génératives et diagrammatiques, mais selon le carré épistémique en virtuel, fonctoriel, dual et universel. Les catégories comme le diagramme déterminent une localisation, un territoire, lui même composé de multiples strates et de couches, qui transportent ses propres propriétés, mais aussi en exportent d'autres. Considérer la catégorie de toutes les catégories, c'est prendre les éléments fonctoriels entre toutes les catégories. Considérer le diagramme dans une sémiotique reviendrait à déployer une typologie, distinguant le syngramme du paragramme, l'hypogramme de l'hypergramme, et l'endogramme de l'exogramme. Mais dans l'approche catégorielle, la catégorie des diagrammes cherche par la création de foncteurs et d'espaces en dualité le dévoilement d'objets universels au-delà de toute typologie.

Les différentes façons de penser ou de présenter les catégories conduisent à un partage crucial des approches de l'Être. Dans une philosophie réaliste, les catégories se construisent sur des entités matérielles, à partir des règles du donné, qui elles-mêmes s'appuient sur des représentations et des lois. Dans une philosophie idéaliste, les catégories sont des classes différentes selon leurs lieux d'appartenance. Elles règlent en partie les modes de liaison entre les tables des concepts et les tables des jugements et ne sont pas incompatibles avec les philosophies de l'immanence. La tripartition de la philosophie, des sciences et des arts que donne Deleuze est un exemple de classification catégorielle définie comme une catégorie mathématique par des objets et des morphismes. La philosophie a pour catégorie le « plan d'immanence » dont les objets sont les « concepts » et les morphismes les « personnages conceptuels ». Les arts ont pour catégorie le « plan de composition » dont les objets sont les « affects » et les morphismes les « figures esthétiques ». La science a pour catégorie le « plan de coordination » dont les objets sont les « fonctions » et les morphismes les « observateurs partiels ». Ce qui détermine le fonctionnement des morphismes est leur disposition relativement à l'espace abstrait dans lequel ils opèrent et leurs positions relatives aux objets de la catégorie. La catégorie diagrammatique des sciences physico-mathématiques a pour objets et pour morphismes une collection de diagrammes et de machines.

## Le fonctoriel

La fonctorialité est un des aspects essentiels de la connaissance scientifique. Elle permet de relier des objets de catégories différentes, de transférer des propriétés d'une catégorie à l'autre et de déduire de nouveaux principes. Elle joue le rôle moderne de la relation aristotélicienne, mais trouve ici un fondement scientifique. C'est une notion qui intervient en théorie mathématique des catégories, mais qui a des applications à d'autres domaines et qui est liée par des relations particulières à la notion d'*analogie*. Le caractère fonctoriel de l'analogie permet le passage entre différentes catégories. Il met en relation des objets thermodynamiques et des objets purement mécaniques, des objets électriques et des objets magnétiques. La dualité des champs électrique et magnétique autorise une similarité de traitement. La nouveauté apportée par Maxwell dans les théories énergétiques repose sur l'analogie chaleur-travail. Il donne d'ailleurs une définition de l'analogie physique : « Par analogie physique, j'entends cette similitude partielle entre les lois d'une science et celles d'une autre qui permet à chacun d'elle d'illustrer l'autre. »[38] Dans les sciences exactes, l'analogie est très souvent une homologie structurale.

Or on le sait, le raisonnement par analogie n'est pas valable, car il conduit à des inférences incongrues (Mars est une planète identique à la terre, la terre est habitée donc Mars est habitée), même si la découverte scientifique est souvent le résultat de l'aperception d'une analogie. Si un corps plongé dans l'eau subit une force due à la poussée d'Archimède, il doit subir cette même force s'il est plongé dans un autre fluide, en particulier dans l'air. Dans cet exemple, c'est la question de l'universalité d'une proposition, sa généralisation à tous les fluides qui est en jeu. Ce que permet la fonctorialité, contrairement à l'analogie. *La République* de Platon est construite sur le rapport analogique de toutes les strates de l'âme juste en corrélation avec la cité juste. L'analogie n'est pas un type de raisonnement scientifique. Elle pose la question de l'unité de l'Être et de ses résonances dans le multiple. Lorsqu'Empédocle parle de la "sueur de la terre" pour qualifier la mer, Aristote condamne la métaphore. Si l'analogie est utile pour les arguments inductifs, les raisonnements hypothétiques et les définitions (*Topiques*, 108a36), elle n'appartient pas pour autant à la science démonstrative qui repose essentiellement sur les syllogismes. Elle permet de trouver des principes généraux, comme le principe de non contradiction ou des principes propres à chaque chose. Dans l'œuvre d'Aristote, on distingue l'*analogie de proportion* et l'*analogie d'attribution.* La première induit une prédication en résolvant une quatrième proportionnelle. Aristote démontre ainsi dans la *Physique* que le temps est orienté, mesurable et continu. Puisque l'antérieur et le postérieur sont dans la grandeur, il est nécessaire qu'ils soient dans le mouvement. Or le temps accompagne toujours le mouvement. Donc, l'antérieur et le postérieur sont dans le temps. Le temps est mesurable car le nombre est l'expression du plus et du moins. Or le plus et le moins sont dans le mouvement, donc le plus et le moins sont dans le temps. Le temps est par conséquent quelque chose comme un nombre. Aristote montre ensuite mais toujours selon des analogies (*Physique* 220a3) que l'instant est l'unité de mesure. Il en déduit que le temps est continu puisqu'il adjointe passé et présent (*Physique* IV 13).

Le second type d'analogie ne permet pas de construire des raisonnements hypothético-déductifs, mais de disposer ou de topographier des objets selon des critères catégoriels. Il recouvre le caractère fonctoriel de l'analogie et interroge l'unicité de l'Être. Pour les principes, comme pour les causes, il s'agit de comprendre l'unité du terme "principe" et celui de "cause". « C'est d'une autre façon encore que, par analogie, toutes les choses ont les mêmes principes : à savoir l'acte et la puissance » (*Métaphysique*, Λ 5, 1071a3) Et toutes les causes sont les mêmes par analogie, car matière, forme, privation et cause motrice sont les causes communes à chaque chose (*Métaphysique*, Λ 5, 1071a32). Chaque genre est constitué de trois principes : la forme (le blanc est à la couleur ce que la lumière est au jour), la privation (le noir est à la couleur ce que l'obscurité est au jour) et le substrat (littéralement *hypokeiménon*, ce qui est posé sous) qui supporte ces qualités (la surface est à la couleur ce que l'air est au jour). De la même manière, dans l'*Ethique à Nicomaque*, le concept de Bien se déploie selon les catégories de l'Être. A la série des biens (mesure, agréable, habitat, ... ) correspond la série des catégories (quantité, qualité, lieu, ...) Mais par delà la correspondance terme à terme des séries, ce qui fonde l'unité de la couleur ou du Bien est un même renvoi à un principe unique.

[38] W.D. Niven, *The Scientific papers of James Clerk Maxwell*, p. 156.

Un foncteur est une application particulière entre les objets et les morphismes de deux catégories qui conserve l'identité et la composition de morphismes[39]. La fonctorialité n'induit pas d'inférence logique. Pour reprendre l'exemple de l'habitation de la planète Mars d'un point de vue catégoriel, il faut envisager d'une part la catégorie des planètes dont les objets sont les planètes et les morphismes sont les applications qui à une planète $X$ associe la planète $Y$ si $X$ et $Y$ ont les mêmes conditions d'apparition de la vie (ou bien si $X$ et $Y$ ont la même probabilité que la vie apparaisse) et d'autre part la catégorie *habitée* qui est formée de deux objets : l'objet "habité" et l'objet "non habité" et du morphisme identité. Cette catégorie est représentée par la catégorie du Deux ($\mathbf{2} = \{0, 1\}$). La définition d'un foncteur $F$ entre ces deux catégories doit associer chaque objet et chaque morphisme de la catégorie des planètes à un objet et un morphisme de la catégorie habitée. Pour chaque planète $X$, il faut dire ce qu'est $F(X)$ dans la catégorie habitée, autrement dit dire, et non déduire, si la planète est habitée ou non. Et pour chaque morphisme $\varphi$, dire ce qu'est le morphisme $F(\varphi)$ dans la catégorie habitée (qui ne peut être ici que l'identité par construction de la catégorie habitée qui n'a qu'un seul morphisme). Le foncteur $F$ doit encore vérifier les deux axiomes de sa définition. Premièrement, appliqué au morphisme identité d'une planète $X$, $F$ est le morphisme identité dans la catégorie habitée de l'objet $F(X)$. Deuxièmement, le transformé par $F$ d'un morphisme composé $F(g \circ h)$ est la composée des transformées $F(g) \circ F(h)$. Le foncteur $F$ est alors complètement défini.

Ce qui différencie la fonctorialité de l'analogie est que la fonctorialité considère en plus des objets eux-mêmes, les applications et relations entre ces objets. Les morphismes exercent un contrôle sur la structure de la catégorie et limitent le champ opératoire. Parce qu'il opère sur les morphismes, un foncteur se doit de mettre en correspondance l'information liée au fonctionnement machinique de la catégorie $\mathcal{A}$ vers la catégorie $\mathcal{B}$. Le transport d'une catégorie à l'autre s'effectue non seulement entre des objets, mais aussi et surtout entre les morphismes. Dans la définition d'une catégorie comme dans la définition d'un foncteur, le caractère motorique est toujours conservé par la composition d'applications entre elles. Par la considération non seulement des objets, mais aussi des morphismes, la fonctorialité contraint à impliquer davantage les relations causales entre objets, ce que l'analogie de proportion délaisse.

Les applications des foncteurs au domaine ontologique sont nombreuses. Pour des raisons de lisibilité, nous ne traitons pas de la *monade* de Mac Lane qui suppose trop de connaissances mathématiques, mais qui pourrait trouver ici une remarquable illustration. Dans son livre autobiographique, Mac Lane montre la puissance de la notion de couple de foncteurs adjoints et son prolongement en applications naturelles. Il donne pour la première fois une définition catégorielle de la monade. En tant qu'objet fonctoriel, c'est un triple composé d'un foncteur produit des foncteurs adjoints et de deux applications naturelles, elles-mêmes issues du couple de

[39]Plus précisément, un foncteur $F$ (covariant) de la catégorie $\mathcal{A}$ vers la catégorie $\mathcal{B}$ associe à chaque objet $X$ de $\mathcal{A}$ un objet $F(X)$ de $\mathcal{B}$ et à chaque morphisme $h : X \to Y$ associe un morphisme $F(h) : F(X) \to F(Y)$ tel que (1) Pour chaque objet $X$ de $\mathcal{A}$, on a $F(id_X) = id_{F(X)}$. (2) Si $h : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux morphismes de $\mathcal{A}$, alors $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$. On définit un foncteur contravariant par dualité en renversant le sens des flèches. Dans ce cas, la transformation des morphismes composés devient $F(g \circ h) = F(h) \circ F(g)$.

foncteurs adjoints. En théorie des catégories, la naturalité[40] est aussi une application fonctorielle. Dans son livre, Mac Lane raconte les avancées obtenues lors de la conférence sur l'algèbre catégorielle qui eut lieu en 1965 sur le campus de l'Université de Californie à La Jolla, où semble-t-il, la notion de monade, au sens catégorielle a vu le jour[41].

Prenons un exemple plus simple de foncteur : le *foncteur transcendantal*[42] de Badiou et essayons d'en retracer sa généalogie. Pour Badiou, le *transcendantal* d'un monde s'identifie à ce que le mathématicien appelle un *treillis local*[43], c'est-à-dire une *algèbre de Heyting complète*[44]. C'est une structure qui suit les règles du calcul propositionnel intuitionniste (classique dans les cas où le principe du tiers exclu est vérifié pour tous les éléments de l'algèbre, qui est alors une algèbre booléenne) en forme de treillis muni d'une relation d'ordre, possédant un élément initial (noté 0) et un élément final (noté 1) et pour laquelle, pour tout objet $b$, le foncteur conjonctif $F : a \to a \wedge b$ admet un adjoint à droite[45]. La complétion de l'algèbre assure la distributivité de la conjonction relativement au supremum d'éléments. Pour tout objet $a$ et toute famille $b_i$ du treillis local, on a la relation distributive suivante

$$a \wedge \left( \bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

[40] La naturalité est définie de la façon suivante. Si $F$, $G$ sont deux foncteurs de la catégorie $\mathcal{A}$ vers la catégorie $\mathcal{B}$, une *transformation naturelle* de $F$ vers $G$ est une application $\eta$ des objets de $\mathcal{A}$ vers les morphismes de $\mathcal{B}$ notée $\eta : F \to G$ et telle que : (1) Pour chaque objet $A$ de la catégorie $\mathcal{A}$, l'application $\eta_A : F(A) \to G(A)$ est un morphisme dans $\mathcal{B}$, (2) Pour chaque morphisme $h : A \to B$ de $\mathcal{A}$, on a $\eta_B \circ F(h) = G(h) \circ \eta_A$.

[41] « Parmi les présentations qui ont eu une certaine influence à cette conférence, il y a celles qui ont été donnés par John Gray sur les catégories fibrées, celle de Freyd sur l'homotopie stable, celle de Barr-Beck sur les modèles acycliques et les triples et celle d'Eilenberg-Kelly sur les catégories fermées. C'est un petit échantillon des idées qui ont vu le jour à La Jolla. (...) La même année, Samuel Eilenberg et John Moore publièrent leur déterminant article "Foncteurs adjoints et triples". L'idée de base de cet article repose sur un couple de foncteurs adjoints $F : X \to A$ et $U : A \to X$, où $X$ représente des ensembles, $A$ des groupes et $F_x$ le groupe libre engendré par l'ensemble $x$, tandis que $U$ est le foncteur qui oublie la structure de groupe sur l'ensemble sous-jacent. Ce couple de foncteurs détermine un foncteur $T = UF$ sur la catégorie sous-jacente $\mathcal{X}$, alors que l'adjonction produit deux transformations naturelles $\eta : I \to T$ et $\mu : T^2 \to T$ ayant certaines propriétés. Ces trois objets $(T, \eta, \mu)$, définis sur une catégorie $\mathcal{X}$, conduisent à un objet appelé *triple* comme cela a été proposé par Eilenberg et Moore. Ce nom n'est pas un choix opportun, car beaucoup d'objets mathématiques viennent par trois, et j'ai proposé plus tard le nom de *monade*. Quel que soit le nom, l'idée est vraiment puissante. A partir d'une monade $(T, \eta, \mu)$, on peut reconstruire la catégorie supérieure $A$ comme la catégorie des algèbres pour $(T, \eta, \mu)$, donnant ainsi une formulation claire de la structure de base des algèbres universelles, où $\mathcal{X}$ est la catégorie des ensembles et où $F$ assigne à chaque ensemble l'algèbre libre correspondante. Malheureusement, les algébristes n'ont pas suivi ces notions éclairantes. » Saunders Mac Lane, *A Mathematical Autobiography*, A.K. Peters, 2005, p. 240. René Guitart fait remarquer qu'il ne faut pas généraliser trop rapidement. « En général, il est faux que l'on puisse reconstruire la catégorie supérieure $A$. (...) Entre la catégorie des adjonctions et celle des monades, il n'y a pas une équivalence, mais une adjonction, dont l'un des foncteurs est le passage à la monade et l'autre, le retour aux algèbres. »

[42] A. Badiou, *Logiques des mondes*, p. 293.

[43] La notion de *treillis local* a été introduite à la fin des années 50 par Charles Ehresmann. Elle permet, comme le topos de Grothendieck, de faire selon l'expression de René Guitart *un calcul des lieux*. Voir R. Guitart, "Charles Ehresmann, au carrefour des stuctures locales et algébriques", *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle*, XLVI-3 (2005), p. 196-198.

[44] A. Badiou, *Logiques des mondes*, p. 563. Pour comprendre les corrélations entre aspects mathématiques et philosophiques, voir par exemple, F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra*, vol. 3, Cambridge University Press, 1994. J.L. Bell *Toposes and Local Set Theories*, Oxford University Press, 1983. O. Wyler, *Lectures Notes on Topoi and Quasitopoi*, World Scientific, 1991. S. MacLane I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory*, Springer, 1991.

[45] La notion de couple de *foncteurs adjoints* a été introduite par Daniel Kan en 1958.

Les éléments du treillis local sont appelés les *degrés du transcendantal*. Ensuite, Badiou considère le faisceau au dessus du treillis local. Un *faisceau* est pour le mathématicien un foncteur contravariant du treillis local $\Omega$ vers la catégorie des ensembles qui vérifie des propriétés de recollement pour tous les recouvrements du treillis local. C'est un ensemble stratifié (un Être-multiple) qui se construit par recollement à l'aide de la relation d'ordre pour constituer les niveaux du faisceau. Au dessus d'un treillis local, la notion de faisceau coïncide avec la notion de morphisme étale (ouvert, continu) introduite par Grothendieck. Un morphisme étale de treillis locaux est localement un isomorphisme. L'égalité dans un faisceau ne prend pas seulement les valeurs vrai ou faux (correspondant aux éléments intial et final), mais toutes les valeurs intermédiaires du treillis local. Comme son nom l'indique, un treillis local est un monde qui relativement aux lois de ce monde localise ses éléments. Le faisceau est une généralisation de la notion d'ensemble à laquelle est attachée une pluralité de valeurs de vérité. La catégorie des faisceaux sur un treillis local est un topos (donc une catégorie particulière). Le faisceau est une stratification du treillis local qui permet d'étudier ses éléments localement à différents niveaux. Le faisceau sur un treillis local $\Omega$ est un autre treillis local, localement isomorphe au treillis local d'origine $\Omega$. Si $F$ est un faisceau sur un treillis local $\Omega$ et $u$ un élément du treillis local, l'élément $F(u)$ est l'ensemble des niveaux d'appréhension de $u$ identifié à l'Être-multiple. Le foncteur covariant de la catégorie des ensembles (le monde où apparaissent les objets) vers le transcendantal (le treillis local de ce monde) est, dans le vocabulaire de *Logiques des mondes*, appelé l'*indexation transcendantale*. Si $A$ est un objet apparaissant dans un monde, $A$ est un multiple de ce monde, et l'Être-là de $A$, le feuilletage de sa multiplicité correspond au faisceau déployé au-dessus de son treillis local. L'élément $u$ du treillis local associé à l'objet $A$ est le degré transcendantal de $A$. Il détermine l'existence de $A$. « L'indexation transcendantale d'un multiple, relativement à un monde donné, est ce qui fixe la mesure, dans le monde, des identités et des différences dans l'intensité d'apparition de deux éléments de ce multiple. Autrement dit, ce par quoi est donné le mode d'apparaître de ce qui compose un multiple pur. »[46] Si $a$ et $b$ sont deux éléments de l'ensemble $A$, l'indexation transcendante de $a$ et de $b$ mesure la différence d'identité entre ces deux éléments. Si elle est égale à l'élément $u$, formellement si $ind(a, b) = u$ et si $u$ est le minimum du treillis local, alors $a$ et $b$ sont aussi peu identiques que possible. Dans la relecture de Badiou, la fonction *ind* est appelée la *fonction d'apparaître ou d'identité*. Un monde est par conséquent identifié par la fonction d'apparaître à la catégorie des faisceaux sur un transcendantal, qui est, nous l'avons vu, un topos. Les propriétés de ce topos détermine sa propre logique (classique ou intuitionniste selon que le topos est booléen ou non). Il s'ensuit que le transcendantal relève du domaine de la logique et le faisceau au-dessus du transcendantal est du domaine de l'ontologique.

En résumé, un monde est, selon la juste expression de Badiou, un espace *ontologiquement clos*. C'est le lieu où apparaissent les objets. Le transcendantal d'un monde est un sous-ensemble algébrique qui a les propriétés d'un treillis local. La propriété principale est l'existence d'une relation d'ordre ontologique dans le faisceau où s'étage l'Être-multiple au-dessus du transcendantal. Un élément du transcendantal se relève par le foncteur dual de l'indexation transcendantale ou foncteur d'apparaître dans l'Être-multiple. Ce relèvement n'est pas une rétroaction[47], mais une expression de la dualité catégorielle et de la fonctorialité. « Le foncteur assure

[46] *Ibid.* p. 610.
[47] *Ibid.* p. 618.

ainsi une remontée intelligible de la synthèse transcendantale dans l'apparaître vers une synthèse réelle dans l'être-multiple. »[48]

### Le foncteur des opposés

Dans le carré d'Apulée, la logique aristotélicienne se déploie selon une mise en espace des oppositions arcboutées entre l'ordre naturel des côtés du carré et la puissance hétérologique des diagonales. Le carré distribue autrement les opposés. Il est dans un espace opératoire conçu comme un abaque des représentations logiques de la disposition des contraires, s'offre au calcul et ordonne les syllogismes dans une distribution réglée des êtres et des choses. Miroir des différences, il pointe les termes antagonistes autant que la conjonction des contraires, exprime le même autant que les dissemblances. C'est avec l'arbre de Porphyre, le diagramme le plus célèbre de la philosophie antique et médiévale.

Le mécanisme diagrammatique repose sur l'interprétation géométrique du carré[49]. Les côtés parallèles relient les prédicats aux sujets, préfigurent la jonction des contraires et placent chaque chose en son lieu selon la fonction d'identité. Les sécantes miment l'opposition des termes. Le parallélisme vaut pour l'accord naturel des choses, l'intersection pour leur discorde. La contradiction qui tient à distance les éléments diagonaux est l'opérateur de négation de la logique classique. La contrariété qui suit les côtés horizontaux du carré n'est qu'une simple transformation de la proposition logique qui oublie la négation des quantificateurs et ne porte que sur la copule. De bas en haut, les côtés ne déplacent que les quantificateurs selon l'axe des subalternes et conservent l'affirmation de l'Être.

La combinatoire du carré repose sur les principes de la logique classique. La vérité ne prend que deux valeurs : vrai ou faux. La négation de la négation est une affirmation. Mais pour que « non pauvre » puisse signifier « riche », il faut que les principes s'appliquent et que « pauvre » signifie « non riche » ou en termes de catégories que le topos soit booléen. Il est pour le moins étrange que poser deux couples de valeurs antagonistes comme le fait Aristote puisse créer un diagramme qui traverse l'histoire et qu'on le retrouve bien au-delà de la logique de Port-Royal. Des deux couples en présence – d'un côté, l'affirmation et la négation, de l'autre, l'universel et le particulier – des forces et des tensions qui les opposent, naissent à partir d'un centre virtuel quatre pôles en équilibre mutuel. L'hybridation naturelle conduit à quatre formes prédicatives qui prennent place aux sommets du carré : l'universelle affirmative (notée A : Tout $X$ est $Y$), l'universelle négative (notée E : Nul $X$ n'est $Y$), la particulière affirmative (notée I : Quelque $X$ est $Y$) et la particulière négative (notée O : Quelque $X$ n'est pas $Y$). Il ne reste plus qu'à déployer la combinatoire des syllogismes et d'appliquer les quatre pôles à chaque composante pour obtenir une majeure, une mineure et une conclusion. Les syllogismes sont classés en quatre figures. Chaque figure comporte plusieurs modes. Par exemple, le troisième mode *Darii* est un syllogisme dont la majeure est une proposition universelle affirmative, la mineure et la conclusion sont des propositions particulières affirmatives. Pour la logique de Port Royal, la majeure est "Tout ce qui sert au salut est avantageux" (A, Tout $Y$ est $X$), la mineure "Il y a des afflictions qui servent au salut" (I, Quelque $Z$ est $Y$). La conclusion que l'on tire "Donc il y a des afflictions qui sont avantageuses" (I, Donc quelque $Z$ est $X$) est une proposition particulière affirmative.

[48] *Ibid.* p. 305.

[49] Voir aussi le *Handbook of the First World Congress on the Square of Opposition*, édité par Jean-Yves Béziau et Gillman Payette, Montreux, 1-3 juin 2003, disponible à l'adresse http ://www.square-of-opposition.org/images/handbook.pdf

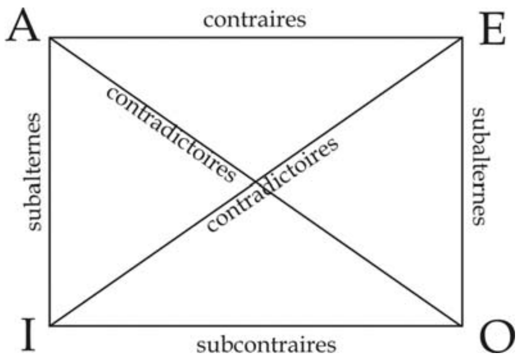



FIG. 7. Le carré d'Apulée

Il y a donc quatre types d'opposés disposés en carré. Mais pour que le carré fonctionne, il faut que les objets, les substances et les choses trouvent dans la confrontation de leur termes un équilibre qui assure leur distribution aux quatre points cardinaux. Pour passer d'un point à un autre, l'opérateur de négation ne suffit pas. Chaque axe déploie ses antagonismes, portant de manière sélective sur la quantification ou simplement sur la copule elle-même. Le passage de l'universelle affirmative à la particulière affirmative n'affecte que le quantificateur, alors que le passage d'un subcontraire à un autre ne porte que sur la négation de la copule. Pour que le diagramme fonctionne pleinement, il faut aussi que le verbe être puisse se conjuguer à tous les temps et à tous les modes. La contrariété, que nous distinguons de la sous-contrariété parce qu'elle porte sur des termes différents de la proposition, se réfère à une variable libre – qui n'est pas prise dans la quantification (la variable $Y$) – et qui est commune aux deux contraires. Elle apparaît dès lors comme un opérateur différenciant relativement à un référent commun. Les différences produites entre les espèces au sein d'un même genre subsument l'unité des contraires sous un même genre et ouvrent la possibilité de construire une taxinomie de l'arbre des espèces. La classification des bestiaires, du ciel ou des herbiers n'est plus un inventaire, mais l'organisation du logos selon les degrés de différences dans les limites d'une même topique, en somme selon une Un-différence.

Avant que la logique n'agisse, il faut disposer les êtres selon les pôles cardinaux et assurer leur mise en espace, pour mieux éprouver l'universalité du diagramme. Car quand les choses s'ordonnent selon leurs propriétés naturelles en quatre éléments, comment justifier les oppositions entre les termes du carré ? Des quatre complexions – le chaud, le froid, le sec et l'humide – découlent l'ordre quaternaire des éléments, des humeurs, des saisons, des vertus et des points cardinaux. L'ordre des opposés entre au chausse-pied dans la disposition du quadrilatère. Car lorsque l'ordre logique ne peut justifier l'ordre topologique, lorsque l'ordre et la distinction des propriétés ne se conforment pas à l'ordre des substances, on invoque l'homologie des diagrammes pour retrouver l'unité du monde. Pas seulement l'analogie et la similitude, mais aussi la généalogie viennent expliquer l'agencement des corps, des pierres, des métaux et des plantes selon une grille qui semble avoir toujours été là. L'analogie des genres porte sur la contrariété et la contradiction des éléments de la chaîne des espèces. Elle multiplie les diagrammes tout en les tenant dans une même unité. Lorsque l'homme sert d'archétype pour les autres vivants, à l'aube de l'épistémè classique, il disparaît du jardin des espèces.

Le même diagramme sert de modèle élémentaire au carré sémiotique (voir fig. 8). L'affirmation-négation est maintenue en un couple positif-négatif, tandis que le couple universel-particulier se déplace en une dyade schéma-deixis. Les diagonales représentent le schéma (schéma positif, S1-Non S1 et schéma négatif, S2-Non S2). Les côtés verticaux figurent la deixis (deixis positive, S1-Non S2 et deixis négative, S2 –Non S1). Le schéma devient une médiation entre l'image et le concept (Kant) ou une médiation entre le sensible et l'intelligible (Cassirer). Hjelmslev pose la schématisation entre la forme et la substance. Mais ce qui importe pour nous est la forme catégorielle du carré, la suture entre les objets et les morphismes. Le carré sémiotique conserve les relations d'opposition dialectique (contrariété et contradiction) et ajoute à celles-ci des relations subalternes de complémentarité. Il est selon la définition de Courtès et Greimas la « représentation visuelle de l'articulation logique d'une catégorie sémantique quelconque » ou l'ossature logique des catégories.

C'est donc sur le terrain de la logique qu'est placé le carré sémiotique. Mais sa place est ailleurs. Selon les domaines d'application, le carré définit les termes qu'il manipule en leur assignant les positions qu'ils occupent. C'est relativement à leur place et grâce aux relations constitutives qu'ils entretiennent que les termes du carré expriment une identité catégorielle. Selon l'axe paradigmatique, les substitutions de termes concourent à confronter les catégories entre elles, qui laissent entrevoir des entrecroisements dans les sous-catégories. Les membres des classes inférieures naissent de l'intersection de ces sous-catégories et deviennent à leur tour les éléments qui se placent aux sommets d'un nouveau carré. Les carrés ainsi obtenus tissent un réseau de carrés hiérarchisés, reliés entre eux par des caractères catégoriels. Selon l'axe syntagmatique, les isotopies assurent la cohérence des termes du carré nécessaire à l'intelligibilité de son fonctionnement. Dans la théorie greimassienne, le carré est tout entier centré sur le *parcours génératif*. De ce point de vue, ce sont les opérateurs des structures profondes qui opèrent dans le diagramme et non la logique prédicative. Le carré sémiotique n'est donc pas une machine à produire de l'inférence, mais plus une topologie des relations actantielles et modales.

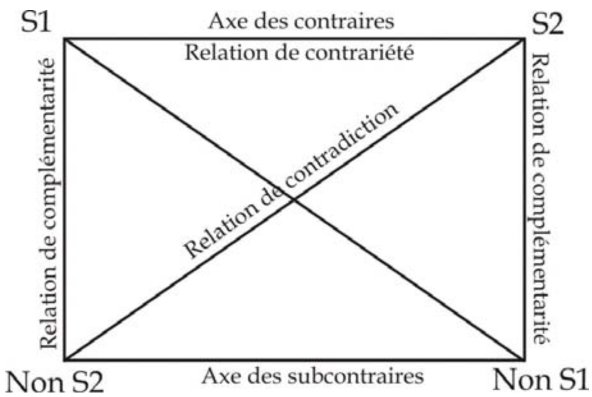



FIG. 8. Le carré sémitotique

Le carré sémiotique suggère quatre modes d'existence[50] : l'actuel, le virtuel, le possible et le potentiel. La catégorie de la présence correspond à ce que la phénoménologie de Merleau-Ponty appelle le « champ de présence ». L'actualisation et la virtualisation se caractérisent par la présence ou l'absence au monde. Le monde se partage entre sensible (= perçu par les sens) et intelligible (= non sensible). L'actuel est ce qui est en acte dans le monde sensible. Le possible est ce qui est en puissance

[50]Greimas et les sémioticiens ne distinguent que trois modes d'existence (le virtualisé, l'actualisé et le réalisé). Fontanille et Zilberberg ajoutent un quatrième mode : le potentialisé, *Tension et signification*, Sprimont, Belgique, Mardaga, p. 98.

dans le sensible. Le réel correspond à la réalité des objets connaissables ou à ce qui est en acte, l'actuel et le virtuel. Le virtuel est en acte dans l'intelligible, tandis que le potentiel est en puissance dans le monde non sensible. Le virtuel est ce qui est virtualisé, l'actuel ce qui est actualisé et le potentiel ce qui est potentialisé. L'actualisation ou l'apparaître est le processus qui permet de passer du virtuel à l'actuel. Le processus inverse est la virtualisation. Il offre le passage de l'actuel au virtuel, le retour des étants à l'Être. Ce découpage s'interprète aussi comme un modèle du diagramme RSI (Réel – Symbolique – Imaginaire) de la philosophie lacanienne. Le possible correspond au monde symbolique et le potentiel au monde imaginaire. Les nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ et les nombres réels $\mathbb{R}$ sont du domaine de l'actuel. Les nombres imaginaires construits sur la racine de l'unité négative $i = \sqrt{-1}$ relèvent du virtuel, qui est ici comme dans la philosophie leibnizienne « ce qui peut être amené à l'existence par des forces ».

Dans la théorie sémiotique greimassienne, le carré se transforme par homologie en plusieurs figures selon les modalités. Chaque mode est lui-même subdivisé selon les quatre pôles du carré. La *modalité aléthique* est construite sur la nécessité (devoir-être, S1), la contingence (Pouvoir ne pas être, non S1), l'impossibilité (Devoir-ne pas être = ne pas pouvoir être, S2) et la possibilité (Ne pas devoir-Ne pas être, non S2). La *modalité épistémique* repose sur la certitude (croire-être, S1), l'improbabilité (Croire ne pas être, S2), la probabilité (Ne pas croire, ne pas être, non S2) et l'incertitude (Ne pas croire être, non S1). La *modalité véridictoire* est fondée sur être (S1), paraître (S2), non-paraître (non S2) et non-être (non S1). Enfin la *modalité déontique* articule la prescription (devoir-faire, S1), l'interdiction (devoir, ne pas faire, S2), la permissivité (Ne pas devoir, ne pas faire, non S2) et la facultativité (Ne pas devoir faire, non S1). Dans ces univers sémiotiques, la quête et l'élaboration du sens consistent, par un jeu de taquin et sous le contrôle des actants, à poser un carré, puis à le mettre en regard du carré épistémologique. Alors le pôle en regard de la certitude aura valeur de vérité par simple identification topologique. Il s'ensuit que le rôle du diagramme n'est plus de révéler au travers des singularités les objets du virtuel, il est d'identifier par homologie les structures discursives.

## Logiques du diagramme et diagrammes de la logique

Dans la conception diagrammatique de la logique, la proposition est elle-même un diagramme. Mais ce diagramme n'est qu'une représentation formelle. C'est pourquoi mathématiciens et philosophes ont cherché une transcription graphique de ce diagramme qui puisse faciliter l'inférence. Avant l'invention du calcul des séquents, le diagramme de logique n'est pas seulement la figure taxinomique des prédicats du premier ordre, c'est d'abord un instrument qui reste encore à inventer.

On cherche donc un critère de diagrammité (*diagramhood*) qui puisse dire ce que serait un diagramme, et par voie de conséquence, en donner une représentation graphique optimale, car selon l'expression de Deleuze, « il y a quelque chose de figural dans les fonctifs, qui forme une *idéographie* propre à la science, et qui fait déjà de la vision une lecture »[51]. Cette idéographie, elle n'est pas encore claire dans l'esprit d'Euler. Elle le deviendra avec Boole et plus encore avec Frege.

Dans les *cercles d'Euler,* la quantification universelle ($\forall$) est représentée par un jeu d'inclusion ou de disjonction (fig. 9). L'interprétation ensembliste est évidente. Dire que "Tout $A$ est $B$", c'est dire que "pour tout $x$, si $x$ est élément de $A$, alors $x$ est élément de $B$" ou encore que "l'ensemble $A$ est inclus dans l'ensemble $B$". Autrement dit, l'inclusion $A \subset B$ est la représentation graphique de la proposition universelle affirmative. De la même manière, la disjonction ensembliste $A \cap B = \varnothing$ représente la proposition universelle négative, "il n'existe pas d'élément $x$ qui soit

[51] G. Deleuze et F. Guattari, *Qu'est-ce que la philosophie*, p. 119.

à la fois dans $A$ et dans $B$". Ainsi, par de simples diagrammes, Euler anticipe la théorie des ensembles et sa relation au calcul des prédicats.

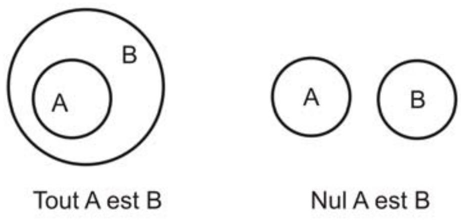



FIG. 9. Cercles d'Euler, quantificateur universel

Pour le quantificateur existentiel (fig. 10), Euler transcrit les propositions particulières selon l'intersection de deux cercles. L'interprétation ensembliste conduit à un même diagramme. Dire que "quelque $A$ est $B$", c'est dire "qu'il existe au moins un élément $x$ tel que $x$ soit à la fois dans $A$ et dans $B$", autrement dit, en anticipant dans le langage de la théorie des ensembles que l'intersection de $A$ et de $B$ est non vide ($A \cap B \neq \varnothing$). Dire que "quelque $A$ n'est pas $B$", c'est dire "qu'il existe au moins un élément $x$ qui soit dans $A$, mais pas dans $B$", autrement dit que $A$ n'est pas inclus dans $B$ ($A \not\subset B$) ou que $A$ croise le complémentaire de $B$ ($A \cap B^c \neq \varnothing$). Il y a donc une différence essentielle entre représentation ensembliste et cercle d'Euler. Ici, deux propositions distinctes ont des représentations ensemblistes identiques.

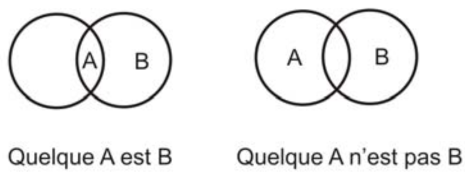



FIG. 10. Cercles d'Euler, quantificateur existentiel

D'un point de vue ensembliste, les deux diagrammes sont équivalents. Ce qui les différencie est simplement la position de la lettre $A$, qui transcrit l'existence de l'élément $x$. En théorie des ensembles, l'ensemble $A$ est pour chaque diagramme le cercle de gauche et la position de la lettre $A$ relativement à ce cercle n'a aucune signification. Les deux diagrammes signifient simplement que "$A$ n'est pas inclus dans $B$" et que "l'intersection de $A$ et de $B$ n'est pas vide" ($(A \cap B \neq \varnothing) \wedge (A \not\subset B)$).

La transcription d'Euler du carré aristotélicien n'est donc pas une transcription ensembliste, mais une transcription de formules logiques dans laquelle la place des noms a son importance. Certaines formules auront une interprétation ensembliste, d'autres seront ambiguës.

Dans la logique aristotélicienne, *Barbara* est la première figure du premier mode (voir fig. 11). Elle se traduit par une majeure, une mineure et une conclusion qui sont toutes des propositions universelles affirmatives. Elle correspond de manière formelle au syllogisme qui se décompose en trois moments : (1) Tout $A$ est $B$, (2) Tout $B$ est $C$ (3) Donc tout $A$ est $C$. La logique de Port Royal transcrit ce syllogisme de la manière suivante : "Quiconque laisse mourir de faim ceux qu'il doit nourrir est homicide (Tout $A$ est $B$), tous les riches qui ne donnent point l'aumône dans

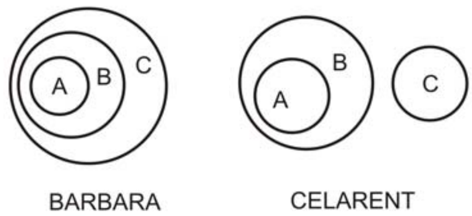



FIG. 11. Cercles d'Euler, logique aristotélicienne

les nécessités publiques laissent mourir de faim ceux qu'ils doivent nourrir (Tout $B$ est $C$), Donc ils sont homicides (Donc tout $A$ est $C$)." Dans la transcription ensembliste, Barbara est l'inclusion en série de la majeure, qui se trouve incluse dans la mineure, elle-même incluse dans la conclusion.

$$A \subset B,\ B \subset C \Longrightarrow A \subset C$$

Le diagramme des cercles d'Euler qui représentent le deuxième mode de la première figure *Celarent* est formé d'une majeure universelle négative (E), d'une mineure universelle affirmative (A) et d'une conclusion universelle négative (E), soit formellement : (1) Nul $B$ est $A$, (2) Tout $A$ est $B$, (3) Donc nul $A$ n'est $C$, ce qui dans la logique d'Arnault s'énonce : "Nul voleur impénitent ne doit s'attendre d'être sauvé (Nul $B$ est $A$), tous ceux qui meurent après s'être enrichis du bien de l'Église sans vouloir le restituer sont des voleurs impénitents (Tout $A$ est $B$). Donc nul d'eux ne doit s'attendre d'être sauvé (Donc nul $A$ n'est $C$). Dans la transcription ensembliste, *celarent* traduit le fait que l'ensemble $A$ est inclus dans l'ensemble $B$ qui n'a pas d'élément commun avec l'ensemble $C$ et ne peut par conséquent intersecter l'ensemble $A$. C'est la représentation elle-même qui contraint l'ensemble $C$ à ne pas pouvoir rencontrer l'ensemble $A$, protégé par $B$. Cette proposition logique est donc contrainte par sa représentation topologique.

$$A \subset B,\ B \cap C = \varnothing \Longrightarrow A \cap C = \varnothing$$

Dans les *Lois de la pensée*, Georges Boole développe son propre système idéographique selon les canons de l'algèbre. Il cherche à instrumentaliser le raisonnement et à résoudre des équations logiques par des résolutions d'équations algébriques. Pour cela, il définit un langage composé d'un système de signes dans lequel les lettres de l'alphabet désignent les « objets de nos conceptions » et les opérateurs algébriques classiques ($+$, $-$, $\times, =$, etc.) les connecteurs logiques (*et*, *ou*, etc.). Par exemple, si $x$ est un homme et $y$ une propriété (e.g. sage), le produit $x \cdot y$ applique la propriété $y$ à l'objet $x$ et désigne donc un homme sage. La somme est une conjonction logique. Si $x$ est un homme, $y$ une femme, la somme $x+y$ représente un home et une femme. Ce formalisme permet d'associer concepts et équations dans une même dynamique. L'exemple de Boole ($x$ = hommes, $y$ = femmes et $z$ = européens) transcrit la distributivité de l'addition relativement à la multiplication

$$z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$$

en une phrase « puisque le sens est le même qu'on dise : hommes et femmes européens » ou « les hommes européens et les femmes européennes. »

Gottlob Frege va plus loin que le "langage par formules de Boole". Il remet en cause le signifiant linguistique et déploie dans son idéographie un type d'écriture différente de tous les langages parlés.

> « Je n'ai pas voulu – dit-il – donner en formules une logique abstraite, mais donner l'expression d'un contenu au moyen de signes

écrits, et d'une manière plus précise et plus claire au regard que cela n'est possible au moyen des mots. En fait, je n'ai pas voulu créer seulement un *calculus ratiocinator* mais une *lingua characterica* au sens de Leibniz, étant bien entendu que le calcul de la déduction est à mon sens partie obligée d'une idéographie. »[52]

Le langage est le centre de la mécanique frégéenne, mais comme la langue parlée, la langue des mots n'accorde aucune signification ou presque à la place des mots, il faut selon Frege donner une plus grande importance logique à l'espace. Ce n'est pas le contenu sonore des mots et des phrases qui importent dans la justesse d'une expression, mais c'est une mise en espace qui doit articuler les connecteurs logiques d'un contenu.

« Une écriture qui veut exploiter tous les avantages propres aux signes visibles doit être entièrement différente de tous les langages parlés. Il est à peine besoin de dire que ces avantages n'entrent pour ainsi dire pas en jeu dans l'écriture du langage parlé. La position réciproque des mots sur le plan d'écriture y dépend pour une grande part de la longueur des lignes et, dans cette mesure, n'est d'aucune signification. Mais il existe d'autres types d'écriture qui font meilleur profit de ces avantages. Le langage de l'arithmétique est une idéographie (*Begriffsschrift*) puisqu'il exprime immédiatement la chose sans passer par les sons.[53]»

Dans la diagrammatique frégéenne, le trait horizontal est appelé le « trait du contenu ». Il décrit le contenu d'un jugement (— $A$). Le trait vertical ($\top$ $A$) représente l'opérateur de négation. L'espace est ainsi cartographié dans un double mouvement logique où l'affirmation et la négation se partage les dimensions du plan de l'écriture. La figure 12 montre différentes expressions logiques. Le premier idéographe représente l'implication (car "$B$ implique $A$" équivaut à "$A$ ou non-$B$" qui est la négation de "non-$A$ et $B$"). Le trait vertical affecte la partie droite du diagramme. Les expressions de la colonne de droite sont les négations des expressions de la colonne de gauche.

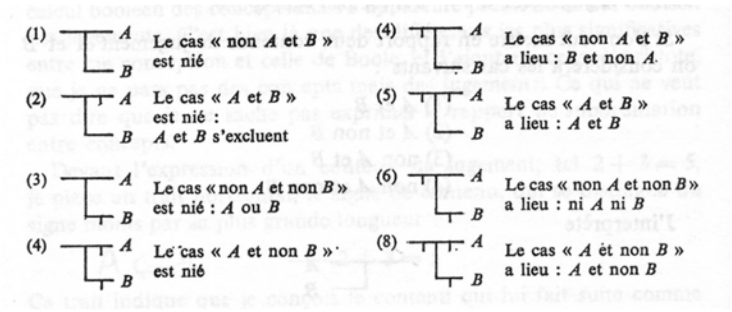



FIG. 12. Idéographie de Frege, in G. Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, p. 76

Pour réduire la portée du jugement à une partie du graphe, Frege utilise une cavité qu'il place sur l'axe du contenu et dans laquelle il met une lettre gothique et non latine. Il considérait ce symbolisme comme un des éléments les plus importants

[52]G. Frege, "Sur le but de l'idéographie", in *Écrits logiques et philosophiques*, p. 71.

[53]G. Frege, "Que la science justifie le recours à une idéographie", in *Écrits logiques et philosophiques*, p. 67-68.

de son idéographie. Mais la signification logique de cette cavité n'est pas claire. Il semble qu'il faille résoudre préalablement la partie du graphe qu'elle affecte avant d'enchaîner les autres implications. Dans l'exemple qu'il donne (voir fig. 13), Frege "résout" préalablement (en $\mathfrak{a}$) l'implication ($\mathfrak{a}^2 = x \;\Rightarrow \mathfrak{a} = x$) avant de poursuivre pour en déduire que nécessairement $x = 0$, c'est-à-dire plus précisément, si toute racine carrée de $x$ est égale à $x$, alors $x$ est nul. En somme, le diagramme symbolise simplement l'implication ($x^2 = x \;\Rightarrow\; x = 0$). Dans l'exemple de Frege, il est inutile de supposer l'existence de la racine carrée de $x$ (qui n'existe pas nécessairement car rien ne dit que $x$ est une quantité positive) pour résoudre le problème.

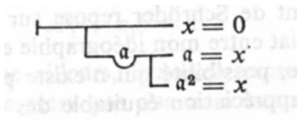



FIG. 13. Résolution d'équations in G. Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, p. 78

Comme on le voit, l'idéographie de Frege est une présentation très simple des implications logiques sous la forme de diagrammes de ramification. Elle a peu d'intérêt pour le développement de la logique, bien qu'elle cherche à exploiter la réalité topographique du calcul propositionnel. Elle n'intègre pas la quantification et c'est ce qui la pénalise. Elle est toutefois une étape importante dans le développement des techniques diagrammatiques et le calcul des séquents. Elle interroge la place du langage dans le raisonnement démonstratif que Frege résume en cette phrase :

> « Il n'est pas possible, dit-on, que la science puisse faire de grands pas grâce à une idéographie : car la découverte de celle-ci présuppose l'achèvement de celle-là. Le langage offre déjà cette même difficulté illusoire : lui seul semble avoir rendu possible le développement de la raison, mais comment se pourrait-il que l'homme ait créé le langage sans la raison ? »[54]

Comme Euler, Venn voulait développer une *logique symbolique*[55] à partir de diagrammes. Car il savait que la représentation diagrammatique a l'avantage sur la représentation ordinaire de préserver l'information à la fois géométrique et topologique. Dans les *diagrammes de Venn*, les ovales représentent des ensembles. Les points à l'intérieur de l'ovale figurent les éléments de l'ensemble. Ces diagrammes permettent d'introduire facilement le vocabulaire abstrait de la théorie des ensembles (intersection, union, différence asymétrique, fonctions d'un ensemble sur un autre, relation d'équivalence, etc.). On les abandonne parfois au profit d'autres représentations, car on ne peut dessiner spontanément de manière lisible dans toutes les sous parties du diagramme plus de cinq ou six ovales. Au-delà les intersections ne se distinguent pas nettement. Pour décrire de manière rigoureuse les intersections d'ensembles, on utilise des graphes que l'on appelle des *diagrammes linéaires.*

C'est d'abord une expression du calcul propositionnel que cherche à développer Venn à partir des diagrammes de Boole. Il est assuré qu'il existe une solution diagrammatique qui traite des cas plus compliqués que les simples syllogismes de la logique aristotélicienne. Sa démarche est essentiellement soustractive. Dans les représentations ensemblistes, il va hachuré ou grisé les parties de graphe à soustraire. Dans l'exemple suivant (fig. 14) pour représenter la proposition "Tout B est A", il

[54] G. Frege, "Que la science justifie le recours à une idéographie", in *Écrits logiques et philosophiques*, p. 69.

[55] J. Venn, *Symbolic logic*, New-York : Chelsea (Première édition 1884), 1972.

soustrait la partie de B qui n'est pas dans A, quel que soit le contexte environnant, puisque dans l'ordre alphabétique aucune lettre ne vient se glisser entre A et B. Par contre dans la représentation de la proposition “Tout A est C”, il exclut les éléments de A qui ne sont pas dans C, mais de plus comme la lettre B s'intercale entre A et C, il exclut les éléments de $C$ qui ne sont pas concernés par la proposition et qui ne sont pas exclusivement entre $A$ ou $C$. Il exclut donc la partie $(B \cap C) \setminus A$.

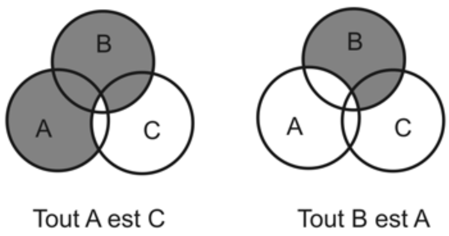



FIG. 14. Diagrammes de Boole-Venn

Comme les diagrammes de Venn sont limités pour dessiner toutes les intersections ovalaires, des logiciens et des informaticiens ont tenté de développer à la fin des années 1980 des programmes de preuves diagrammatiques. Les premiers essais ont été réalisés par Jon Barwise et John Etchemendy qui avaient la conviction que le raisonnement diagrammatique pouvait s'implémenter facilement et produire des programmes efficaces et consistants. Ces travaux ont été poursuivis par Isabel Luengo, Sun-Joo Shin et Nathaniel Miller sur des questions de logique et de géométrie euclidienne[56]. La thèse de N.G. Miller donne les règles d'inférence et de construction de diagrammes pour la géométrie euclidienne. On a aussi proposé des systèmes hybrides pour utiliser à la fois les connaissances de logique, de topologie et de théorie des graphes. Le concept de *higraphes*[57], développé par David Harel[58], conjugue la notion de diagramme de Venn et celle de graphe. Ce graphe s'interprète aussi comme une catégorie dans laquelle les sommets sont des ensembles qui définissent les objets de cette catégorie et les arêtes sont des relations binaires entre ces ensembles de sommets qui définissent les morphismes de la catégorie.

Sun-Joo Shin a étudié un système logique du premier ordre sur la base des diagrammes de Venn qu'il appelle *Venn I*[59]. Ce système diagrammatique a été repris par Eric Hammer en 1995[60], qui en a développé une variante. L'étude de ces diagrammes porte sur leur adéquation à représenter des situations logiques simples. Comme dans les diagrammes de Venn et la logique alpha de Peirce, les graphes se composent d'ovales délimitant des régions recevant un ensemble de propositions logiques. Pour assurer la cohérence de leur manipulation, la théorie prévoit que l'ajout ou le retrait d'un ovale doit respecter certaines règles. Les graphes ainsi formés sont dits bien-formés s'ils respectent ces règles.

---

[56]Voir I. Luengo “A Diagrammatic Subsystem of Hilbert's Geometry” in G. Allwein et J. Barwise, *Logical Reasoning with Diagrams*, 1996, p. 149-176. Sun-Joo Shin, *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge University Press, 1994. N. G. Miller, *A Diagrammatic Formal System for Euclidean Geometry*, Ph. D. Dissertation, Cornell University, 2001.

[57]Le higraphe n'est pas un hypergraphe. Cette dernière notion a été inventée par le mathématicien français Claude Berge (1926-2002). Voir C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Paris : Dunod (1970).

[58]David Harel, “On Visual Formalism” *Communications of the ACM*, 31-5 (1988) p. 514-530.

[59]Sun-Joo Shin, *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge University Press, 1994.

[60]E. Hammer, *Logic and Visual Information*, CSLI Publications, 1995.

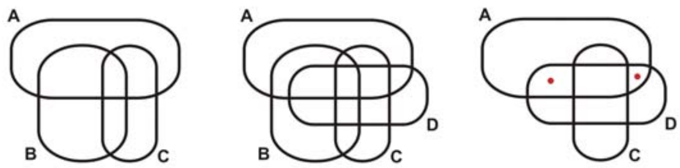



FIG. 15. Diagrammes de Venn

Une des règles prescrites est le fait que le retrait d'un ovale ne donne pas lieu à des régions distinctes géographiquement, mais semblables du point de vue ensembliste. Dans l'exemple de la figure 15, toutes les régions délimitées par les intersections d'ovales ont une signification différente. Ajouter l'ovale D respecte cette règle, mais retirer l'ovale C donne naissance à deux régions marquées d'un point, distinctes du point de vue de l'espace, mais semblables du point ensembliste, puisque toutes deux correspondent aux éléments de A qui appartiennent aussi à D. La question se pose alors de savoir si on peut dessiner un diagramme équivalent dans lequel chaque région a sa propre signification ou si on est obligé de dessiner des régions distinctes ayant la même signification. Dans ce dernier cas la question se pose de savoir s'il existe un nombre minimal de régions de cette sorte.

Les problèmes posées par les diagrammes de Venn et leurs variantes qui transfèrent des problèmes de logiques vers des problèmes topologiques ne sont pas tous résolus. Pour certains, les deux questions essentielles que sont – Comment transcrire diagrammatiquement la logique du premier ordre ? et Existe-t-il une démonstration diagrammatique ? – posent la question kantienne "qu'est-ce que s'orienter dans la pensée ?" et interrogent les mécanismes qui sont au cœur des méthodes démonstratives. Pour nous, il s'agit de se demander ce qu'est une orientation logique dans la pensée, sachant que l'intérêt de ces recherches diagrammatiques résident dans l'interaction du logique et du topologique.

### Peirce et les diagrammes existentiels

Lorsque Peirce découvre les diagrammes de Venn vers 1896, il les considère d'emblée comme le cadre idéal de ses recherches logico-philosophiques. L'idée de Peirce est que pour étudier le mécanisme de l'inférence, il faut d'abord définir une représentation diagrammatique de tout ensemble possible de prémisses.

> « Notre propos, dit-il, est donc d'étudier le mécanisme interne de l'inférence. Ce que nous voulons, pour faire cela, est une méthode de représentation diagrammatique de tout ensemble possible de prémisses, ce diagramme étant tel qu'on peut observer les transformations de ces prémisses en une conclusion par une série d'étapes, chacune étant la plus simple possible. »[61]

Pour éviter les erreurs qui ont souvent été commises par les logiciens eux-mêmes, la logique déductive doit se concentrer sur l'étude des relations et les formes entrelacées des inférences. Peirce pense que l'écheveau ne peut se dénouer que si on porte une plus grande attention aux représentations de faits. Ces formes sont de type iconique et par conséquent représentent des relations factuelles par des relations analogiques. Leur étude ne peut se faire que par l'observation de diagrammes[62].

---

[61]C.S. Pierce, *Collected Papers*, 4.429.
[62]*Ibid.* 4.533.

Peirce considère les diagrammes existentiels comme une contribution majeure à la logique. Dans ces diagrammes (voir fig. 16), une lettre seule représente une proposition vraie, deux lettres $A$ et $B$ apposées côté à côte sont reliées par la conjonction "et" ($A \wedge B$). Un ovale (appelé *cut* par Peirce) autour d'une lettre ou d'une expression quelconque $A$ est la négation de la lettre ou de l'expression "non A" ($\neg A$). Le substrat de ces diagrammes est voisin de ceux d'Euler et de Venn.

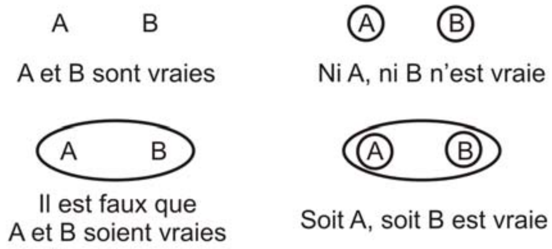



FIG. 16. C.S. Peirce, Diagrammes existentiels

L'implication est une simple relation topologique, puisque la proposition "$A$ entraîne $B$" ($A \Rightarrow B$) est équivalente à la proposition "non $A$ ou $B$" ou formellement $\neg(A \wedge \neg B)$. Les ovales permettent ainsi de coder tout type d'implication. La proposition de droite sur la figure suivante (fig. 17) est sous forme traditionnelle $\neg(A \wedge B \wedge \neg C)$, ce qui équivaut à "A et B impliquent C" ($A \wedge B \Rightarrow C$).


FIG. 17. C.S. Peirce, l'implication

Peirce soutient que les raisonnements déductifs ne peuvent être corrects que s'ils sont accompagnés d'un support visuel et que c'est à travers ce support que l'on pourra se rendre compte et mesurer la véracité d'une déduction. On comprend dès lors que les diagrammes doivent obligatoirement inclure les relations entre objets[63]. Les simplifications des inférences logiques se font de manière simple et mécanique, alors que dans le cas d'inférences formelles les réductions sont parfois lourdes et les erreurs s'introduisent facilement.

Dans les diagrammes existentiels, les symboles sont utilisés uniquement pour nommer les objets de base et les classes, mais jamais pour désigner les relations logiques. Les diagrammes se composent de trois parties que Peirce désigne par les lettres grecques alpha, beta et gamma. Tout se joue dans les propriétés des relations entre objets individuels. La partie alpha des diagrammes « ne représente aucun raisonnement à l'exception de ceux qui tournent autour de la logique relationnelle des termes généraux. » La partie beta est capable de « décomposer des raisonnements d'un type très compliqué, des propositions dont la signification ne s'exprime dans le langage ordinaire que par des périphrases longues et confuses. »[64] Peirce reconnaît

[63] *Ibid.* 4.533.
[64] *Ibid.* 4.510-511.

que les beta-diagrammes sont difficilement communicables, mais reproduisent avec clarté et précision les mécanismes de l'inférence.

A chaque type de diagramme correspond une logique différente. Les alpha-diagrammes relèvent du calcul propositionnel non quantifié. Les beta-diagrammes sont les diagrammes de la logique propositionnelle, qui ajoute au calcul propositionnel la manipulation des quantificateurs et les gamma-diagrammes sont des représentations des logiques modales. Cette conception a été critiquée par Sun-Joo Shin[65] qui voit dans l'existentialité des diagrammes un substitut aux quantificateurs universels et définit des *lignes d'identité* en reliant des éléments existentiels comme “est A”, “est B” par des ligatures. Il souligne la volonté de Peirce de représenter graphiquement les relations et met en évidence le caractère iconique des diagrammes peirciens[66].

Pour comprendre ces *ligatures*, il suffit de regarder la figure 18. Le diagramme de gauche représente la proposition “Quelque chose $A$ est $B$” car la ligne d'identité transfert un fragment d'existence entre $A$ et $B$. Les formes négatives sont indiquées par encerclement. Le diagramme de droite dit : “il est faux que quelque chose de $A$ ne soit pas $B$”, autrement dit “Tout $A$ est $B$”.


FIG. 18. C.S. Peirce, Ligatures

Dans la philosophie de Peirce, « un diagramme est un *representamen* qui est majoritairement une icône de relations et est défini de cette manière par convention. Les indices sont aussi plus ou moins utilisés. »[67]. Rappelons que dans la théorie de Peirce, il y a trois modes d'êtres ou *catégories phanéroscopiques* : la priméité, la secondéité et la tiercéité. « La *priméité* est le mode d'être de ce qui est tel qu'il est, positivement et sans référence à quoi que ce soit d'autre. »[68] La *priméité* est la catégorie du sentiment et de la qualité. A cette catégorie appartient, par exemple, la rougéité, qui est le mode d'être de ce qui est rouge, avant même que dans l'univers quelque chose fût rouge[69], mais aussi « certaines qualités sensibles comme la valeur magenta, l'odeur de l'essence de rose, le son d'un sifflet de locomotive, le goût de la quinine »[70]. « La *secondéité* est le mode d'être de ce qui est tel qu'il est par rapport à un second, mais sans considération d'un troisième quel qu'il soit. »[71] C'est la catégorie de l'expérience, de la lutte, du fait et de l'existence. « Dire

[65]Sun-Joo Shin, “Reviving the Iconicity of Beta Graphs” in M. Anderson, P. Cheng, V. Haarslev (Eds.) *Theory and Applications of Diagrams*, Springer, 2000, p. 58-73.

[66]Volli et Thom ont cherché à faire un inventaire des transformations géométriques impliquées par la relation d'iconicité. Voir par exemple, Volli, Ugo (1972), « Some possible developments of the concept of iconism », *VS*, 3, (1972), pp. 14-30. Thom, René (1973), « De l'icône au symbole (esquisse d'une théorie du symbolisme) », *Cahiers internationaux du symbolisme*, 22-23, (1973), pp. 85-106. N. Goodman distingue dans l'iconicité deux relations distinctes : la ressemblance et la représentation.

[67]C.S. Peirce, *Collected Papers*, 4.418.

[68]*Ibid.* 8.328, p. 22.

[69]*Écrits sur le signe*, 1.25, p. 70.

[70]*Op. Cit.* 1.304.

[71]*Ibid.* 8.328, p. 22.

qu'une table existe, c'est dire qu'elle est dure, lourde, opaque, sonore, autrement dit qu'elle produit des effets immédiats sur les sens, et aussi qu'elle produit des effets purement physiques, attirée par la terre (autrement dit, qu'elle est lourde), réagit dynamiquement contre d'autres choses (autrement dit, qu'elle a une force d'inertie), résiste à la pression (autrement dit, qu'elle est flexible) »[72]. Enfin « la *tiercéité* est le mode d'être de ce qui est tel qu'il est, en mettant en relation réciproque un second et un troisième. »[73] La tiercéité est la catégorie de la pensée et de la loi. Elle met en relation un premier et un second. Si une paire de dés amène cinq fois de suite un double six, cela ne veut pas dire que la fois suivante un double six sortira de nouveau, mais que le résultat même s'il est actuellement inconnu sera toutefois déterminé. « Ce mode d'être qui *consiste*, et je dis bien *consiste*, dans le fait que les faits futurs de la secondéité revêtiront un caractère déterminé, je l'appelle tiercéité. »[74]

Ces trois phanérons déterminent le cadre catégoriel dans lequel Peirce définit le signe comme un composé triadique[75]. « Un *signe* ou *representamen* est un premier qui entretient avec un second appelé son *objet*, une relation triadique si authentique qu'elle peut déterminer un troisième, appelé son *interprétant*, à entretenir avec son objet la même relation triadique qu'il entretient lui-même avec ce même objet. »[76] Le signe a donc trois dimensions : le representamen est le signe envisagé pour lui-même et correspond à sa dimension syntactique, l'objet est le signe dans sa dimension existentielle ou sémantique et enfin la relation qu'il entretient avec son interprétant est sa troisième dimension. Ces trois dimensions croisées avec les trois dimensions catégorielles (priméité, secondéité et tiercéité) conduisent à neuf subdivisions.

| | Priméité | Secondéité | Tiercéité |
|---|---|---|---|
| Representamen | *Qualisigne* | *Sinsigne* | *Légisigne* |
| Objet | *Icône* | *Indice* | *Symbole* |
| Interprétant | *Rhème* | *Dicisigne* | *Argument* |

Comme le signe est composé de trois subdivisions, cette table fournit 27 classes de signes, mais Peirce n'en retient que dix[77], car les combinaisons doivent respecter

[72] *Ibid.* 1.457, p. 209.

[73] *Ibid.* 8.328, p. 22.

[74] *Écrits sur le signe*, 1.26, p. 71.

[75] Peirce a une prédilection pour les décompositions triadiques, car « toute relation tétradique, pentadique ou de n'importe quel nombre plus grand de corrélation n'est pas autre chose qu'un composé de relations triadiques. » (*Écrits sur le signe*, 1.347, p. 101) C'est d'ailleurs un théorème mathématique bien connu que toute surface régulière est triangulable.

[76] *Op. Cit.* 2.274, p. 147.

[77] Ces dix classes sont : 1. Un qualisigne (iconique, rhématique), e.g. "un sentiment de rouge", 2. Un sinsigne iconique (rhématique), e.g. "un diagramme individuel", 3. Un sinsigne indiciaire rhématique, e.g. "un cri spontané", 4. Un sinsigne (indiciaire) décent, e.g. "une girouette", 5. Un légisigne iconique (rhématique), e.g. "un diagramme, indépendamment de son individualité factuelle", 6. Un légisigne indiciare rhématique, e.g. "un pronom démonstratif", 7. Un légisigne indiciare décent, e.g. "un cri de la rue", 8. Un symbole rhématique ou un rhème symbolique (i.e. un (légisigne) symbolique rhématique), e.g. "un nom commun", 9. Un symbole dicent (i.e. un (légisigne) symbolique dicent), e.g. "une proposition ordinaire", 10. Un argument (i.e. un (légisigne symbolique) argumental), e.g. "un raisonnement". *Écrits sur le signe*, 2.254-2.264, p. 179-184. Dans une Lettre à Lady Welby du 24 décembre 1908 on trouve une description de ces dix classes. « (8.334) Les dix points de vue selon lesquels les principales divisions des signes sont déterminées sont les suivants : 1) selon le mode d'appréhension du signe lui-même, 2) selon le mode de présentation de l'objet immédiat, 3) selon le mode d'être de l'objet dynamique, 4) selon la relation du signe avec son objet dynamique, 5) selon le mode de présentation de l'interprétant immédiat, 6) selon le mode d'être de l'interprétant dynamique, 7) selon la relation du signe avec l'interprétant dynamique, 8) selon la nature de l'interprétant normal, 9) selon la relation du signe

la hiérarchie des classes. Les choix des trois composantes ne peuvent se faire dans la table que de haut en bas et de droite à gauche, une composante étant choisie pour chaque dimension du signe.

L'icône est une image de son objet qui conserve cette relation même si l'objet n'existe pas. C'est donc le caractère qui dans un signe fait que le signifiant et le signifié sont dans une relation de ressemblance ou d'évocation. C'est pourquoi Peirce assimile les icônes aux simulacres (aux $o\mu o\iota\omega\mu\alpha\tau\alpha$ d'Aristote)[78] et définit l'*hypoicône* comme un representamen iconique. Le diagramme est alors nécessairement pris dans une relation dyadique.

> « On peut en gros diviser les hypoicônes suivant le mode de priméité auquel elles participent. Celles qui font partie des simples qualités ou premières priméités sont des *images* ; celles qui représentent les relations, principalement dyadiques ou considérées comme telles, des parties d'une chose par des relations analogues dans leurs propres parties sont des *diagrammes* ; celles qui représentent le caractère représentatif d'un representamen en représentant un parallélisme dans quelque chose d'autres sont des *métaphores.* »[79]

Considérer le diagramme comme une icône revient dans la classification de Peirce à ne lui autoriser que trois classes, car il n'y dans cette classification que trois classes iconiques. La première classe, la classe des qualisignes (iconiques, rhématiques) représente un diagramme immatériel qui n'existe pas encore, c'est l'équivalent du schème, dans sa version immatérielle du schéma. C'est le diagramme virtualisé. La deuxième classe, la classe des sinsignes iconiques regroupe les "diagrammes individuels" c'est-à-dire le diagramme (icône) tel qu'il existe sur une feuille de papier (sinsigne). C'est le diagramme actualisé. Enfin, la classe des légisignes iconiques rhématiques rassemble les diagrammes indépendamment dit Peirce, de leur identité factuelle. Le diagramme n'a pas d'existence physique, il est seulement envisagé. C'est le diagramme potentialisé. A travers l'iconicité piercienne du diagramme, on retrouve donc les trois dimensions sémiotiques du réel (virtuel, actuel et potentiel) qui s'apparentent localement aux catégories phanéroscopiques (priméité, secondéité et tiercéité).

### Preuves diagrammatiques

A ce stade de notre réflexion, nous pourrions nous demander s'il existe des preuves diagrammatiques ? Nous préférons nous interroger sur ce que signifie s'orienter diagrammatiquement dans une démonstration ? Car l'objet "preuve diagrammatique" n'est pas un objet universel. Il existe des démonstrations qui ne peuvent se transcrire de manière graphique. Et justement, ce qui importe n'est pas de donner un graphe de la preuve, mais de construire un raisonnement à partir d'un ou de plusieurs diagrammes, c'est-à-dire de fournir l'intuition de la solution autant que mettre en place l'expression machinique des virtualités prospectives qui délivreront l'explication.

L'inférence diagrammatique n'existe pas. A l'exception du calcul des séquents (les séquents peuvent être aussi considérés comme des diagrammes), l'enchaînement logique de figures diagrammatiques qui n'a de cesse de chercher un chemin qui

---

avec l'interprétant normal, 10) selon la relation triadique du signe avec son objet dynamique et son interprétant normal. » *Écrits sur le signe*, 8.334, p. 55.

[78]Lettre à Lady Welby, in *Écrits sur le signe*, p. 55.

[79]C.S. Peirce, *Écrits sur le signe*, 2.277, p. 149.

conduit à l'ultime tautologie n'a pas de sens. Pour qu'il ait un sens, il faudrait que les diagrammes de ce cheminement aient tous une valeur de vérité et qu'un système déductif permette de passer d'un diagramme à un autre. S'il n'existe pas de chaînes entre ces diagrammes, il existe pour un même diagramme une opératoire qui conduit à l'expression de vérités. Si pour des raisons esthétiques, le diagramme en soi n'a pas de vérité, les flux et les processus internes déterminent une valuation qui en tant qu'élément consubstantiel au diagramme peut être appelée la vérité du diagramme et ceci indépendamment du nombre de valeurs de vérité (deux, trois ou une infinité). La vérité a un caractère de nécessité. Elle est indépendante de ce nous pensons. C'est un foncteur qui agit ici de la catégorie des diagrammes vers la catégorie véridictoire, qui est en logique classique la catégorie du Deux. Le vrai n'est pas garanti par une libre adhésion de l'esprit.

Pour Leibniz, la démonstration est une réduction de termes complexes, une *catena definitionum* dans laquelle la résolution du problème s'effectue par la substitution de la définition à la place du défini. Ainsi doit-on remonter aux concepts primitifs pour décomposer le complexe de réquisits à démontrer en éléments simples. L'argumentation rationnelle s'épuise alors dans les axiomes et les tautologies. « Car prouver qu'un terme complexe est vrai, – dit Leibniz – c'est le réduire à d'autres termes complexes vrais, et ceux-ci enfin à des termes complexes primordialement vrais, c'est-à-dire à des axiomes (ou propositions connues par soi), à des définitions des termes incomplexes qu'on a prouvés vrais, et à des expériences. »[80] A la différence de la dialectique platonicienne qui privilégie d'abord une recherche par intuition (*noesis*) et redescend ensuite lors de la déduction de son raisonnement (*dianoia*), la méthode démonstrative de Leibniz recourt à des substitutions d'objets sans préciser comment ces objets apparaissent.

> « J'ai toujours pensé que la démonstration n'était rien d'autre qu'une chaîne de définitions ou, en guise de définitions, de propositions soit déjà démontrées auparavant à partir de définitions, soit présupposées avec certitude. Or l'analyse n'est rien d'autre que la résolution du défini en définition, ou de la proposition en sa démonstration, ou du problème en son effectuation. Mais quand plusieurs effectuations de la même chose peuvent s'imaginer, alors il faut chercher de nouvelles données ou expériences, par lesquelles exclure ces effectuations ou ces causes qui ne sont pas appropriées. Si par contre de telles données nouvelles (comme celles que Bacon appelle instances cruciales, *instantias crucis*) ne sont pas disponibles, alors nous ne pouvons pas désigner avec précision la cause vraie de l'effet, mais nous sommes contraints de nous contenter d'une hypothèse ou cause possible, qui sera d'autant plus probable qu'elle sera plus simple et plus harmonieuse (*concinnior*), comme sont l'hypothèse copernicienne en astronomie et la cartésienne en certaines parties de la physique. »[81]

Le diagramme substitue à l'ordre sériel de l'enchaînement des vérités l'ordre topologique. Il ne traduit pas une représentation fidèle et nécessairement conforme à la réalité. Son pouvoir ne réside pas dans la fidélité graphique, mais dans sa pertinence et dans sa propension à stimuler l'imaginaire. Lorsque Descartes dans

[80] L. Couturat, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, p. 372.

[81] Lettre de Leibniz à Conring du 3 janvier 1678, citée par François Duchesneau, *Leibniz et la méthode de la science*, Seuil, 1993, p. 185.

la *Sixième méditation* distingue deux degrés de l'imagination, celui des idées intellectuelles (*ideae intellectae*) et celui des idées adventices des sens (*ideae sensu perceptae*), il admet que le pentagone se laisse représenter de manière conforme et fidèle, mais que le chiliogone ou le myriagone n'ont pas de représentation. S'il est impossible de représenter l'image de cet objet fidèlement, il est toutefois possible d'en donner un diagramme en remplaçant ce qui ne peut être représenté par un artifice symbolique comme le trait pointillé ou toutes autres marques signifiant la répétition des segments. C'est d'ailleurs ce qui se fait couramment dans le formalisme des $n$-uplets $(x_1, x_2, .., x_n)$ dont l'indice et les points de suspension se substituent à l'impossibilité d'énumérer complètement les $n$ objets. Pour le mathématicien, la représentation fidèle du myriagone n'a pas d'intérêt. Seul importe que l'objet soit parfaitement défini. L'existence d'un objet est complètement absorbée par son essence. Le myriagone existe virtuellement et cela suffit à prouver sa réalité.

Mais alors le diagramme, s'il privilégie l'intuition ou l'induction sur la déduction, la réalité sur la vérité, ne serait-il pas plus apparenté à la méthode, à la dialectique ou à un art qu'à la démonstration ? Dans la philosophie platonicienne et aristotélicienne, la méthode ($\mu\acute{\epsilon}\theta o\delta o\varsigma$) est associée à un art ($\tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$). C'est pourquoi l'expression "méthode scientifique" n'apparaît pas chez les premiers philosophes grecs. Il faut attendre Galien au II[e] siècle de notre ère pour que le savoir scientifique, et notamment médical, trouve dans les trois méthodes (*analysis*, *synthesis* et *diairesis*) qu'il propose dans l'*Ars parva* et le développement historique des mathématiques, les premiers éléments de la méthode moderne. Eustrate ajoute à cette liste l'*apodeixis* et ses différentes distinctions (*compositio, dissolutio, divisio, demonstratio*) que l'on trouve chez Ciceron et Quintilien sous les noms d'*invention*, de *disposition* et d'*élocution*, et qui furent enseignées durant tout le Moyen Age et le début de la Renaissance comme les axes majeurs de la méthode. C'est cette invention et cette disposition que l'on trouve dans le diagramme et qui perdure dans la *Dialectique* de Pierre de la Ramée[82] publiée en 1555, plus de quatre-vingts ans avant le *Discours de la méthode* (1637) de Descartes.

Dans ce qui suit, nous présentons trois exemples de démonstrations diagrammatiques. Le premier exemple montre qu'une démonstration est toujours relative à un horizon de vérité. Le deuxième exemple montre qu'un même diagramme peut donner lieu à des démonstrations différentes, qu'il n'y a pas unicité de la preuve. Le troisième exemple est une démonstration purement diagrammatique par identification de surfaces élémentaires. L'objet de toutes ces démonstrations est le même : il s'agit de transformer un problème algébrique (établir une équation) en un problème géométrique (identifier ou calculer des surfaces).

Examinons notre premier exemple. C'est une démonstration de l'identité algébrique suivante, appelée en mathématique "identité remarquable"

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Dans cet exemple, la difficulté est de comprendre la présence et l'origine du terme $2ab$. D'un point de vue algébrique, il s'agit de vérifier que l'addition est distributive par rapport à la multiplication. Quant à la démonstration diagrammatique, elle repose simplement sur la connaissance des surfaces du carré de côté $x$ et du rectangle de largeur $x$ et de longueur $y$. Il est bien connu que la surface du carré est $x^2$ et celle du rectangle $xy$. Le carré de côté $(a+b)$ est découpé en quatre parcelles dont les surfaces sont indiquées sur la figure 19. L'expression de la surface du carré total $(a+b)^2$ comme somme des surfaces des sous-éléments démontre l'identité cherchée.

[82]Pierre de la Ramée (1515-1572), de son nom latin *Petrus Ramus*, est un disciple convaincu de la méthode platonicienne, des commentaires et des gloses de Pic de La Mirandole et de Marsile Ficin. Ces écrits lui vaudront une condamnation de La Sorbonne et de Pavie, bastions de l'aristotélisme.

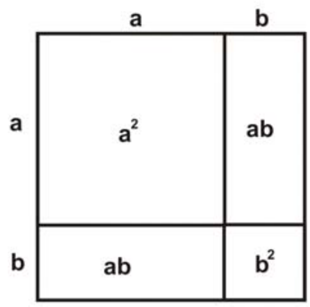



FIG. 19. Identité remarquable

Ainsi la méthode diagrammatique explicite ce que la méthode algébrique formalise. Elle donne à voir en une seule figure le développement d'un calcul, ici la distributivité. Il n'y a pas d'inférence diagrammatique qui serait l'analogue de l'inférence logique. La démonstration n'est pas régie par la règle de substitution des équivalents, mais par un déjà-là immanent. Tout se passe comme si la démonstration était inscrite dans l'espace. Mais si la méthode est valable pour le calcul des aires, elle ne précise pas son domaine de validité.

Pour des objets matriciels, l'égalité peut être fausse. Considérons par exemple les matrices nilpotentes $a$ et $b$ suivantes :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul de produits montre que les carrés sont nuls ($a^2 = 0, b^2 = 0$), que la somme $a + b$ et les produits $ab$ et $ba$ valent respectivement

$$a + b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ba = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'identité remarquable est donc fausse, puisque les matrices représentant le membre de droite et le membre de gauche de l'égalité diffèrent.

$$(a + b)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq a^2 + b^2 + 2ab = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'identité doit être remplacée par l'égalité

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$$

qui différencie le terme $ab$ du terme $ba$, car le produit de matrices n'est pas commutatif. La justesse de l'égalité est relative à la commutativité du produit, mais rien dans la démonstration ne signale qu'il faille en tenir compte. Il ne faudrait pas croire que cet exemple illustre l'idée que la science évolue par preuves et réfutations. Si la première partie de cette démonstration donne une preuve dans le cas commutatif, celle ci n'est pas réfutée dans le cas non-commutatif. Pour qu'il y ait réfutation, il aurait fallu que la démonstration des aires soit fausse. Or elle est juste, bien qu'elle ne précise pas l'espace mathématique sous-jacent dans lequel elle opère, son horizon de vérité. Il ne s'agit donc pas de réfutation mais d'adaptation. La preuve est adaptée à une algèbre commutative, non à une algèbre non-commutative.

Ce que les diagrammes montrent clairement est que ce modèle de méthodologie dynamique ne correspond pas à la réalité. La science n'évolue pas par preuves et réfutations, falsification et corroboration, mais par *adéquation* et *adaptabilité*. Ce qui importe n'est pas de proposer une preuve, mais un objet adapté à la science et à son histoire. Il n'est pas seulement important que le processus soit vrai, il faut aussi qu'il soit adapté. Les outils évoluent parce que l'histoire les contraint à s'adapter aux nouvelles théories. Si les équations de Maxwell ont changé de forme au contact de la théorie de Hodge, ce n'est pas qu'elles sont fausses, mais qu'elles s'adaptent aux nouvelles mathématiques. Derrière l'évolution du formalisme se profile toujours dans les sciences physico-mathématiques, des changements d'horizons, des changements paradigmatiques et non des réfutations. Le formalisme s'adapte à l'époque. L'adaptabilité est une conséquence de l'adéquation. Les modèles de la physique des particules sont l'exemple le plus simple de cette adéquation. Gilles Cohen-Tannoudji parle d'ailleurs de procédés idoines et forge le néologisme d'*idonéïté* pour désigner cette adéquation. Les mathématiques évoluent aussi selon ce “matérialisme historique ”. Cet exemple contredit aussi le paradoxe de Quine[83]. Il n'existe pas toujours de noyau ou d'élément rationnel autour duquel s'organisent les corrections, qui en dépit des réfutations apparentes perdurerait. Dans la plupart des cas, la théorie n'est pas corrigée, mais simplement remodelée pour s'adapter aux nouveaux horizons.

Passons maintenant à la démonstration du théorème de Pythagore qui énonce que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des côtés adjacents : $c^2 = a^2 + b^2$. Le même diagramme (voir fig. 20) sert de support à deux démonstrations du théorème.

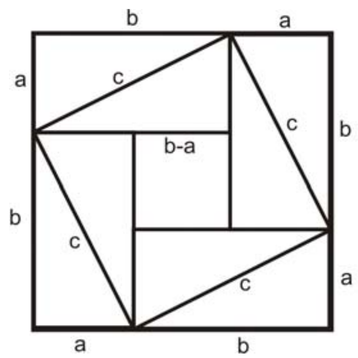



FIG. 20. Théorème de Pythagore I

Dans la première démonstration, on considère la surface du carré inscrit de côté $c$ et on l'égale à la somme des surfaces qu'il contient. La surface de chaque triangle vaut $ab/2$ et la surface du carré central de côté $(b-a)$ vaut $(b-a)^2$, soit

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2$$

ce qui en développant conduit au résultat.

$$\begin{aligned} c^2 &= 2ab + b^2 + a^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Dans la deuxième démonstration, on écrit que la surface totale du carré de côté $(a+b)$ est égale à la surface du carré inscrit de côté $c$ augmentée de la somme des surfaces des quatre triangles situés aux quatre coins :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= c^2 + 4(ab)/2 \\ a^2 + b^2 + 2ab &= c^2 + 2ab \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

[83]W.O. Quine, *From a logical point of view,* p. 42-43.

Ce deuxième exemple montre que les deux démonstrations sont équivalentes. Elles ne se contredisent pas. L'une n'est pas meilleure que l'autre. Elles sont sur un même pied d'égalité. Le diagramme qui les supporte est le même. La première preuve joue de la surface des triangles voisins du carré central, alors que la seconde preuve met en scène les triangles périphériques. Le principe de la démonstration est le même : il consiste à interpréter le carré $x^2$ d'un nombre ou d'une longueur comme la surface d'un carré de côté $x$. Ces deux preuves montrent qu'il n'existe pas toujours de hiérarchies dans les démonstrations. La théorie ne progresse pas nécessairement par englobements successifs.

Une autre démonstration du théorème de Pythagore n'utilise que des translations de surfaces. Pour démontrer l'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ il suffit de considérer les carrés construits sur les trois arêtes du triangle de surfaces respectives $a^2$, $b^2$ et $c^2$ et de montrer que la surface du carré construit sur l'hypoténuse ($c^2$) est la somme des surfaces des carrés construits sur les deux autres côtés ($a^2 + b^2$), simplement en identifiant les sous-zones de même surface.

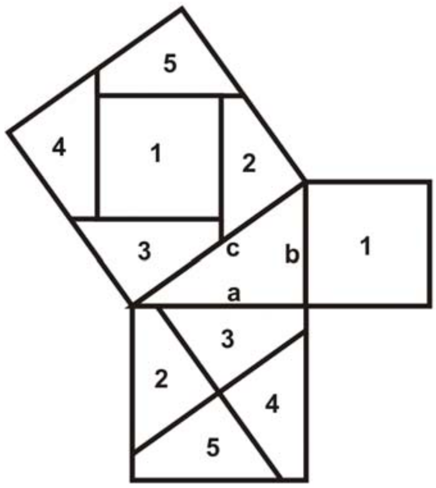



FIG. 21. Théorème de Pythagore II

L'identification procède de la façon suivante (voir fig. 21). Numérotons (1) la surface représentant le carré construit sur le petit côté ($b$) de l'angle droit. Puis découpons le carré construit sur le grand côté ($a$) de l'angle droit en dessinant deux segments de droite passant par le centre de ce carré, l'un parallèle à l'hypoténuse, l'autre orthogonal à l'hypoténuse. Numérotons de (2) à (5) les surfaces obtenues. Maintenant il suffit de faire glisser chacune des surfaces (1) à (5) des carrés droit et inférieur vers le carré construit sur l'hypoténuse et de constater que la somme de ces cinq surfaces est égale à la surface du carré construit sur l'hypoténuse. On a ainsi par de simples translations une démonstration du théorème de Pythagore.

Dans cet exemple, l'âme de la démonstration est portée par le diagramme. La difficulté est de construire le diagramme adéquat, de déterminer le partitionnement des carrés ajustés au périmètre du triangle. C'est ce découpage qui contraint la démonstration et permet l'identification des sous-zones. La démonstration est relative à un horizon de vérité qui peut naître de multiples situations. On sait que les démonstrations géométriques “à la règle et au compas” ne sont pas toujours valables dans un cadre plus général. Si elles sont adaptées à la mesure des terres, elles ne sont pas forcément adaptées à démontrer une expression algébrique formelle.

Les modèles historicistes que les épistémologues ont développés comme le falsificationnisme de Popper ou la méthode par preuves et réfutations de Lakatos[84] privilégient l'existence mutatis mutandis d'un noyau dur autour duquel s'organisent les présupposés théoriques et les recettes méthodologiques. Dans ces modèles, la science s'étoffe progressivement par englobements successifs dans une complexité sans cesse croissante, en ajustant les postulats théoriques aux données expérimentales et en élaguant les branches périphériques. L'inférence est le moteur de cette évolution qui établit dans une construction hiérarchique ordonnée des principes une vérité-démonstration comme limite du modèle. A l'inverse, l'adéquation abandonne les projets logicistes pour une contemplation du topologique. En ce sens, le diagramme réinvente la vérité. Non pas une vérité construite sur l'inférence, mais une vérité-foudre qui place la vérité au cœur de l'événement.

[84]Imre Lakatos, *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, traduction de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde, Paris : Hermann (1984).

CHAPITRE 3

# Physique du virtuel

Le virtuel est d'abord un tout réel qui ne nous est pas explicitement donné. La physique quantique est l'illustration la plus simple d'un virtuel incorporel qui ne se résout que dans une suite de diagrammes. L'intégrale de chemins (que l'on appelle aussi intégrale de Feynman) est une somme sur des composantes virtuelles. C'est cette somme qui détermine le réel tel que nous le percevons. Une somme virtuelle pour un résultat actuel, c'est toute l'ambiguïté de la physique de l'après-guerre. Le virtuel pousse sous l'actuel. Ce qui nous est donné, c'est simplement des passages, des singularités par lesquelles le calcul s'engouffre. Il n'y a pas d'autre alternative au monde des particules élémentaires. Le virtuel est avant tout affaire de découpage et de délimitation. La réalité contient des états de choses existants et non-existants, des objets qui n'ont rien à voir avec leur possibilité ou leur impossibilité. Le réel ne se réduit pas à des actualités, puisqu'il appelle pour se construire des virtualités et des potentialités. Le virtuel est une composante de la réalité. En physique subatomique, les forces sont le résultat d'échanges de particules virtuelles. A la frontière de l'actuel et du virtuel, le diagramme fonctionne comme un réceptacle de virtualités en attente d'actualisation.

### Les diagrammes de Feynman

Dans les diagrammes de Feynman[1], on visualise virtuellement les antiparticules comme des particules qui remontent le temps. Ce qui compte dans le diagramme, c'est le caractère des grandeurs intensives qui le composent et dont la forme sensible est l'événement. Dans le modèle feynmanien, la catégorie des diagrammes se compose d'objets que sont les diagrammes eux-mêmes (les graphes) et de morphismes ou de relations que sont les composantes de l'interaction entre particules (les flèches). La machinerie qui fait fonctionner ces diagrammes est celle des règles de Feynman qui associent à chaque diagramme les formules qui permettent le calcul de l'amplitude d'interaction. Ces règles établies pour l'électrodynamique quantique ont été généralisées à la chromodynamique quantique, ce qui leur confère une certaine universalité. Elles constituent le foncteur entre la catégorie des diagrammes et la catégorie de l'algèbre des éléments matriciels d'interaction et montrent le caractère fonctoriel des diagrammes de Feynman. Dans la conférence Nobel, Feynman écrit que son travail n'a été que d'améliorer des techniques de calcul existantes, fournissant une simplification de la théorie des perturbations par l'introduction de ces fameux diagrammes. Il reconnaît que cela s'est fait au jugé, que la substitution des matrices de Dirac par des opérateurs dans les formules non relativistes n'avait pas d'autre fondement qu'une simple intuition. Il progressait par conjectures en utilisant les intégrales de chemin pour le cas non relativiste, sachant qu'il ne parvenait pas à construire des règles de substitution adéquates pour le cas relativiste[2].

[1] Sur l'histoire des diagrammes de Feynman, voir le livre de Silvan Schweber, *QED and the Men Who Made It : Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga,* Princeton University Press 1994, et celui de David Keiser, *Drawing Theories Apart. The Dispersion of Feynman Diagrams in Postwar Physics*, The University of Chicago Press, 2005.

[2] R. Feynman, Conférence Nobel, in *La Nature de la physique*, p. 266.

Feynman présente ses diagrammes à la conférence de Pocono[3] en Pensylvanie au printemps 1948. Au début des années 40, les physiciens se heurtent à l'unification de la mécanique quantique et de la relativité. On s'interroge sur la nature du *quanta virtuel*. Est-ce un objet ? Existe t-il ? Et s'il existe, selon quelle modalité ?

Schwinger considère qu'il y a deux niveaux de compréhension. Un niveau phénoménologique, où l'on décrit simplement les propriétés des électrons et des photons, et un niveau plus profond où les interactions sont pensées en termes d'*objets primitifs* qu'on appelle des *champs*. La correspondance entre ces deux niveaux ne se fait pas toujours spontanément. L'identification entre des objets physiques et des objets mathématiques est facile dans le cas d'interactions faibles, et en particulier en électrodynamique quantique, mais devient plus difficile au-delà. Une particule comme le photon, en tant qu'objet physique, est différente de ce qui est créé par son opérateur mathématique. La correspondance ne prend son sens que *dans une chaîne de développement dynamique*[4]. Champs et particules ne sont pas en correspondance immédiate. Un an plus tard, avec *la théorie des positons*[5], Feynman inaugure une série d'articles rédigés pour la *Physical Review* qui pose les bases de l'électrodynamique quantique et lui vaudront le prix Nobel. L'idée est de fournir une nouvelle théorie du comportement des électrons et des positons dans des potentiels extérieurs en remplaçant l'ancienne théorie des trous par une réinterprétation des solutions de l'équation de Dirac.

Dans son dialogue avec Feynman, Wheeler prétend qu'il peut expliquer pourquoi tous les électrons ont la même masse et la même charge, c'est parce que dit-il, tous les électrons sont en fait un seul et unique électron. Mais alors comme la matière est symétrique, il y aurait autant d'électrons que de positons. Et Feynman se demande où sont passés tous les positons ? Wheeler ne sait pas répondre à cette question. Il suppose qu'ils sont cachés quelque part dans les protons ou ailleurs.

Si Feynman ne prend pas très au sérieux cette idée d'un seul électron, il s'intéresse en revanche à l'idée de Wheeler selon laquelle les positons pourraient être représentés par des électrons remontant le temps, allant du futur vers le passé. Cette idée a été proposée par le physicien suisse Ernst Stückelberg dès 1941, qui

---

[3]Trois conférences de physique théorique ont été déterminantes pour le développement de l'électrodynamique quantique. La première eut lieu à Shelter Island du 2 au 4 juin 1947. Elle regroupait 25 physiciens (H.A. BETHE, Cornell University, D. BOHM Princeton, G. BREIT, Yale University, K. DARROW, Bell Telephone Lab., E. FERMI, Chicago, H. FESHBACH, MIT, H.A. KRAMERS, IAS Princeton, W.E. LAMB Jr., Columbia University, D.A. MACINNES, Rockfeller Institute, R.E. MARSHAK, University of Rochester, John VON NEUMANN, IAS Princeton, A. NORDSIECK, Bell Telephone Labs., A. PAIS, IAS Princeton, L. PAULING, California Institute of Technology Passadena, I.I RABI, Columbia University, B. ROSSI, MIT, J.R. OPPENHEIMER, University of California Berkeley, J. SCHWINGER, Harvard, R. SERBER, University of California Berkeley, G.E. UHLENBECK, University of Michigan Ann Arbor, J.H. VAN VLECK, Harvard, V.F. WEISSKOPF, MIT, J.A. WHEELER, Princeton). Elle permit à de jeunes théoriciens comme Richard Feynman, Robert Marshak, Abraham Pais et Julian Schwinger de se faire connaître. La deuxième conférence importante eut lieu au Pocono Manor Inn du 30 mars au 1$^{er}$ avril 1948. Sous les auspices de la *National Academy of Sciences*, Oppenheimer invita 28 participants à cette deuxième conférence annuelle. Les notes de Wheeler montre la contribution majeure de Julian Schwinger. Le texte de sa présentation intitulée *Quantum electrodynamics* fait plus de 40 pages alors que les contributions des autres participants varient de 1 à 5 pages, à l'exception de B. Rossi, 14 pages et Richard Feynman, 12 pages. La troisième conférence eut lieu à Oldstone du 11 au 14 avril 1949. Elle permit à Freeman Dyson d'asseoir sa notoriété. Sur ces questions historiques, voir le livre de Silvan Schweber, *Op. Cit.*

[4]J. Schwinger a déposé ses notes de cours à UCLA. Les passages auxquels je fais référence sont extraits du livre de S. Schweber, p. 364. *There is the attempt to deepen the understanding in terms of more primitive objects which are these fields, which are no longer placed in immediate correspondence but through a chain of dynamics.* Lecture notes, p. 69.

[5]R. Feynman, "The Theory of Positrons", *Physical Review* 76 (6), 1949, p. 749-759.

décrit dans plusieurs articles, des lignes d'univers remontant le temps dans les phénomènes de création de paires [6]. Stückelberg a représenté les trajectoires sur des graphes d'espace-temps comme le fera Feynman à partir de l'été 1947. C'est dans l'article de 1949[7] que paraît le premier diagramme de Feynman (voir fig. 22)

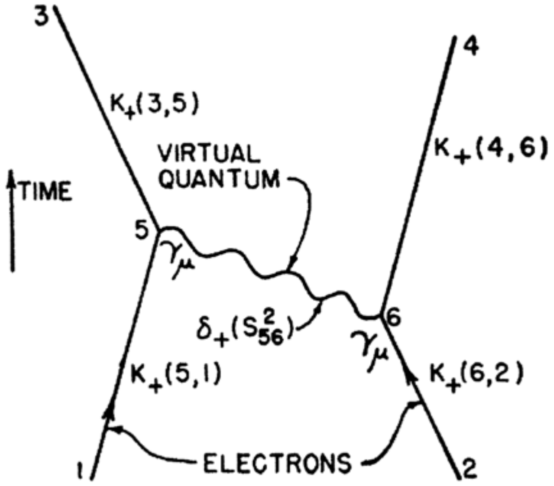



FIG. 22. Diagramme de Feynman, in R. Feynman, *Physical Review*, 76-6 (1949) p. 772

Dans la représentation planaire, la trajectoire d'une particule dans l'espace temps décrit des lignes d'univers sous forme d'entrelacs compliqués qui descendent et remontent le temps. Les échanges de particules virtuelles qui interviennent dans les graphes de Feynman existent pendant des temps très courts. Aux nœuds du diagramme impliquant des lignes de particules virtuelles, les quadrivecteurs ne sont pas conservés. Une particule virtuelle emprunte son énergie au vide et la restitue en un temps infiniment petit déterminé par le principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \hbar$$

Cette relation exprime que la différence d'énergie entre l'énergie actuelle de la particule et son énergie sur sa couche de masse multipliée par son temps d'existence est supérieure ou de l'ordre de la constante de Planck. Elle autorise l'existence de particules virtuelles. La difficulté est que l'énergie du photon échangée lorsque deux électrons se rencontrent peut devenir infinie ou du moins très grande tant que la durée du photon reste infiniment petite. Le problème se complique encore lorsque qu'un couple électron-positon naît spontanément sur une ligne photonique. Pour le philosophe, la naissance spontanée de ce couple est une figure ontologique de l'instant. L'instant précis où la création de particules rejoint l'annihilation. Un instant zéro où le virtuel est le révélateur de la puissance cachée du réel, ou ce qui pousse le réel à devenir ce qu'il est. Le virtuel est délocalisé et déterritorialisé. En somme, c'est une a-topie.

[6] E.C.G. Stückelberg, "Remarque à propos de la création de paires de particules en théorie de relativité", *Helvetica Physica Acta* 14, 1941, p. 588-594. et "La mécanique du point matériel en théorie de la relativité et en théorie des quanta", *Helvetica Physica Acta* 15, p. 23-37.

[7] R. Feynman, "Space Time Approach to Quantum Electrodynamics", *Physical Review* 76 (6), p. 772.

> « Je ne peux pas expliquer ce que j'ai clairement à l'esprit, parce que je le rends actuellement confus et que je ne peux avoir une vue introspective et connaître ce qui s'y passe. Mais la visualisation est sous une forme ou une autre une part vitale de ma façon de penser et il n'est pas nécessaire que j'en fasse un diagramme. Le diagramme est en réalité, et en un certain sens, l'image qui vient pour essayer de clarifier la visualisation, une sorte de cadre vague, mélangé de symboles. C'est très difficile à expliquer, parce que cela n'est pas clair. Mon atome, par exemple, lorsque je pense au spin d'un électron dans un atome, je vois l'atome, je vois un vecteur et une sorte de $\Psi$ écrit quelque part, ou mélangé avec lui d'une façon ou d'une autre, et une amplitude, le tout mélangé avec des $x$. Il est impossible de différencier les symboles de la chose, mais c'est très visuel. C'est dur à croire, mais je vois ces choses non pas comme des expressions mathématiques, mais comme un mélange d'une expression mathématique enroulée d'une façon très vague, dans et autour de l'objet. Ainsi je vois tout le temps des choses visuelles associées avec ce que j'essaie de faire. »[8]

Le diagramme de Feynman apporte une simplification considérable aux calculs de l'algèbre quantique. Dans les interactions, l'échange de particules virtuelles se traduit dans le formalisme par autant de termes compliqués à sommer que de particules sont échangées. Les électrons interagissent en échangeant un nombre arbitraire de photons : plus ils échangent de photons, plus les sommes deviennent inextricables.

Pour mener à terme un calcul de ce genre, il fallait abandonner tout espoir d'une résolution analytique globale. En remarquant qu'à chaque fois qu'on introduit un photon échangé, on ajoute un facteur proportionnel au carré de la charge de l'électron $e^2$ (de l'ordre de $1/137$), on pouvait espérer simplifier le calcul en ne retenant que les premiers termes. Dans l'interaction de deux électrons, l'échange d'un photon introduit un facteur $e^2$, l'échange de deux photons introduit un facteur $e^4$, et ainsi de suite. Plus on introduit de photons échangés, plus les termes correctifs sont petits. Au lieu d'évaluer une seule quantité, on développe alors l'interaction en une série de diagrammes dont le poids est corrélé au nombre de particules échangées. Dans cette méthode perturbative, on arrête le calcul lorsque la précision est suffisante.

Feynman donne les neuf possibilités (voir fig. 23) d'échanger deux photons virtuels dans son article de 1949. Le cas (c) correspond à la création d'une paire d'électron-positron sur une ligne photonique. A partir de ces diagrammes, il construit les intégrales correspondantes. La difficulté est que certaines intégrales divergent. Pour supprimer ces termes infinis, différentes techniques ont été proposées. Elles consistent à réduire le domaine d'intégration ou à renormaliser les termes à intégrer.

A Harvard, Julian Schwinger avait élaboré différentes techniques pour supprimer les termes infinis qui n'utilisaient pas les diagrammes. A la même époque (entre 1943 et 1948), le jeune japonais Sinitiro Tomonaga avait développé lui aussi un formalisme proche de celui de Schwinger. Tous les deux considéraient leur méthode comme une méthode de renormalisation et confrontaient leur théorie aux résultats expérimentaux. À l'Université de Columbia, Willis Lamb et son élève Robert Retherford venaient de mesurer une transition dans l'atome d'hydrogène des états 2s et 2p alors que la théorie de Dirac prédisait que ces deux états avaient même énergie (*Lamb shift*).

---

[8] R. Feynman, *Interview avec S.S. Schweber du 13 novembre 1984*, in Schweber, p. 465.

Finalement, c'est Freeman Dyson, le plus engagé des physiciens dans la défense des techniques diagrammatiques, qui démontre en 1949 l'équivalence des formalismes de Schwinger et de Feynman[9] et propose dans un article[10] soumis à la *Physical Review* une généralisation pour supprimer les divergences à tous les ordres. Il pose les premières "règles de Feynman" et entrevoit les techniques de renormalisation. Sur cette base, Robert Karplus et Norman Kroll publient le calcul des corrections radiatives au quatrième ordre[11].

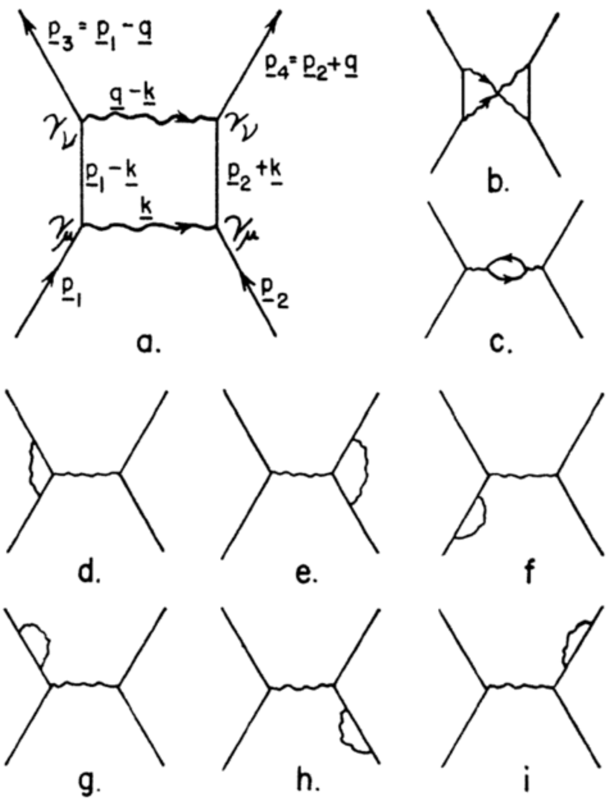



FIG. 23. Echange de photons virtuels, in R. Feynman, *Physical Review*, 76-6 (1949) p. 787

En 1948, Tomonaga et deux de ses élèves, Ziro Koba et Gyō Takeda, introduisent les diagrammes de transition (*transition diagrams*) pour décrire la longue chaîne d'interactions entre un état initial et un état final. Non seulement, ils doivent prendre en compte des échanges de particules, mais ils doivent aussi considérer l'émission et la réabsorption de photons virtuels ou la création et l'annihilation de couples de particules-antiparticules. Rapprochons ce couple de particules virtuelles électron-positon $(e^-, e^+)$ de ce que Badiou appelle un *site*. « Un site est un objet auquel il arrive dans l'être, de s'appartenir à soi-même, et dans l'apparaître, de

[9] F. Dyson, "The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman", *Physical Review* 75, 1949, p. 486-502.

[10] F. Dyson, "The $S$ matrix in quantum electrodynamics", *Physical Review* 75, 1949, p. 1736-1755.

[11] R. Karplus, N. Kroll, "Fourth-order corrections in quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron", *Physical Review* 77, 1950, p. 536-549.

tomber sous sa propre indexation transcendantale, en sorte qu'il attribue à son être une valeur d'existence. »[12] L'auto-appartenance est, on le sait, la difficulté principale de la théorie des ensembles, ou du moins de l'ensemble de tous les ensembles. Un site a donc cette propriété de s'appartenir à lui-même, mais par intermittence. Comment un objet mathématique peut-il être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire un tout et une partie de ce tout ? C'est bien parce que la partie est en réalité un tout, ou dit autrement qu'entre le tout et la partie, il n'y a rien ou seulement du vide. Si le site a une certaine matérialité, il ne peut exister que dans la fulgurance de l'instant sous la forme d'un couple matière-antimatière qui s'annihile lui-même pour exister sans exister.

> « L'ontologie d'un site se laisse décrire par trois propriétés : (1) Un site est une multiplicité réflexive, qui s'appartient à elle-même et transgresse ainsi les lois de l'être. (2) Un site est une révélation instantanée du vide qui hante les multiplicités, par l'annulation transitoire qu'il opère de l'écart entre l'être et l'être-là. (3) Un site est une figure ontologique de l'instant : il n'apparaît que pour disparaître. »[13]

Ce couple de particules virtuelles mesure l'écart qui existe entre l'Être et l'étant. Pourquoi cet écart se réduirait-il à un vide ? Est-ce parce que Badiou cherche à écarter toute transcendante qu'il ignore le virtuel ou qu'il le contraint à s'identifier à des espaces vides ? Mais si l'Être -là a une ou plusieurs composantes virtuelles, l'Être de l'étant ne peut plus être compris comme vide. Le virtuel naît alors de la relation que tissent les étants au-delà d'eux-mêmes et fonde le principe de multiplicité entre l'Être et les étants. Badiou rejette cette conception deleuzienne du virtuel. Il pense que le vide est le nom de l'Être en tant qu'Être , qu'il est soumis à des fluctuations quantiques où la matière apparaît et disparaît instantanément. C'est la fonction de site, qui, reconnaît-il, transgresse les lois de l'Être .

Pour autant, Deleuze n'admet pas le principe du vide. Pour lui, le vide n'existe pas. C'est une illusion de transcendance. Il préfère le virtuel, ce qui, dans le réel, n'est pas actualisation de multiplicités. Échapper au virtuel comme essaie de le faire Badiou par la théorie des ensembles, c'est ramener toute création de concepts (c'est-à-dire pour Deleuze la philosophie) aux fonctions scientifiques d'actualisation. On pourrait objecter qu'il existe une différence importante entre le vide physique et le vide mathématique. Le vide physique est le lieu de la création et de l'annihilation de la matière, alors que le vide mathématique est en général assimilé au néant. En réalité, il suffit de considérer la suite d'ensembles $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, ... pour créer un espace de clones isomorphe aux nombres entiers, et par suite assimiler le vide à l'unité et par voie de conséquence lui donner par la fonction de succession une fonction de création qui rend proche le vide mathématique du vide physique.

Le virtuel permet de contourner la critique de Heidegger que la science moderne réduit l'Être à l'étant. Sur des bancs expérimentaux de l'optique physique avec quelques lentilles convergentes et divergentes, des images actuelles (que le physicien qualifie de réelles) peuvent être matérialisées en interposant une feuille de papier sur le trajet lumineux. Toutefois les images virtuelles ne sont pas matérialisables parce qu'elles se forment à l'infini. Celles-ci sont pourtant bien visibles et donc justement réelles. L'image virtuelle que renvoie le microscope appartient à ce monde. Le couple actuel-virtuel ne s'identifie pas au couple abstrait-concret, ni au couple sensible-intelligible, puisque, dans le sensible, on trouve aussi bien des images

[12] A. Badiou, *Logiques des mondes*, p. 617.

[13] A. Badiou, *Logiques des mondes*, p. 389.

actuelles que des images virtuelles. Pour les mêmes raisons, l'objet physique et l'objet mathématique ne sont pas l'un du domaine actuel et l'autre du domaine virtuel. Cette division n'existe pas : seuls existent des objets physico-mathématiques[14]. Le matérialisme n'est ni une physique (Deleuze), ni un mathématisme (Badiou). Il ne peut être qu'un physico-mathématisme. On s'en remet à la double nature des objets et on voit réapparaître la figure du Deux.

Une des propriétés essentielles du virtuel est sa façon de rabattre l'infini sur le sensible. Nous venons de le voir avec l'image grossissante du microscope qui se forme à l'infini et qui ne peut pas être matérialisée. Nous l'avons vu avec les surfaces de Riemann qui naissent de la jonction quasiment physique des points singuliers à l'infini. Et ici dans les couples de particules virtuelles, dont l'existence n'est possible que sous couvert de la relation d'incertitude d'Heisenberg pour des temps infiniment petits. A chaque niveau du virtuel, il y a un embranchement du possible et de l'actuel. Depuis Leibniz, on découvre progressivement ce qu'est le virtuel dans les différences infinitésimales, dans le mouvement réel comme expression de travaux virtuels, dans une certaine manière de capter l'infini, dans sa puissance explosive.

Le virtuel est le garant de l'univocité de l'être. Mais le virtuel n'est pas seulement l'Un de l'Être. Il replie l'infini au niveau de ce que Badiou appelle le *compte-pour-un*. Ce compte-pour-un est le processus d'équivalence qui opère dans l'ensemble des nombres et des objets qui leur sont isomorphes pour garantir l'unité ensembliste. Pour les multiplicités qui n'ont pas de partie comptable ou dénombrable, pour les objets qui ne sont pas des ensembles, l'unité est assurée par l'univers dans lequel se déploient ces multiplicités. C'est l'horizon de cet univers qui limite et contraint à ce repli du virtuel. Car pour les êtres mathématiques qui ne sont pas des ensembles, l'unité ensembliste n'a pas de sens. Dans ce cas, l'unité ne peut être que virtuelle.

D'un point de vue catégoriel, la catégorie de l'Un replie les étants sur l'objet terminal. L'Être est la catégorie duale de l'Un qui à l'inverse, déploie l'objet terminal sur les étants. Contrairement à ce que pense Schelling, l'Un ne se confond pas avec l'Être, mais l'Un est le dual de l'Être. Le passage d'une catégorie à l'autre s'effectue par le foncteur immanent. D'où l'on tire la conclusion que l'immanence est l'univocité de l'Être.

## L'inten(s|t)ionnalité

Le diagramme vise toujours un objet qui n'a de sens que par le projet qu'à la conscience de se porter vers l'objet pensé à travers le diagramme. L'objet n'a de sens que par cette intentionnalité. Mais ici l'objet de la physique qui nous préoccupe ne peut être pensé que par l'invention du diagramme. Toute la physique de l'après-guerre échoue à composer des sommations sur des particules virtuelles, jusqu'à ce que Feynman propose sa technique diagrammatique. Comment un phénomène physique peut-il être représenté par une somme d'objets virtuels ? Nous connaissons le principe des travaux virtuels en mécanique classique. Feynman pose l'intégrale de chemins en théorie des champs.

Une proposition intensionnelle est une proposition qui ne satisfait pas certaines règles de substituabilité extensionnelle et de généralisation existentielle. Dans une situation logique, l'extensionalité s'appuie sur deux principes d'inférence : la généralisation existentielle et les règles de substituabilité. La généralisation existentielle affirme que si la proposition $F(a)$ est vraie, alors il existe au moins un $x$ tel que $F(x)$. La règle de substituabilité affirme que si $F(a)$ et si $a = b$ sont vraies alors $F(b)$ est également vraie. Dans les situations de la vie courante, la substituabilité

[14] La démonstration a été faite par Gilles Châtelet dans *L'enchantement du virtuel* et *Les enjeux du mobile.*

est souvent en défaut : remplacer l'objet $a$ par l'objet $b$ suppose que le locuteur connaît l'égalité des objets $a$ et $b$ ce qui n'est pas toujours le cas. Même si les objets sont équivalents du point de vue dénotationnel, ils ne connotent pas nécessairement la même chose (cf. l'exemple de Frege : l'étoile du matin et l'étoile du soir.)

Ces propositions sont donc des propositions intensionnelles : leur vérité n'est pas seulement fonction de leur objet, mais aussi de la manière dont celle-ci est appréhendée ou visée. Le diagramme de Feynman est *intensionnel* avec un $s$ lorsqu'il substitue aux éléments du graphe des éléments de calcul. Les interprétations tensorielles, qui permettent le calcul des amplitudes de diffusion sont les équivalents des règles de substituabilité. A une arête, on associe un propagateur ; à un échange de particules, une expression mathématique.

Mais le diagramme de Feynman est aussi *intentionnel* avec un $t$ parce qu'il permet à la conscience de viser la connaissance d'un objet et que cette connaissance n'est possible que par l'intermédiaire du diagramme. Porter à la conscience de l'homme, le diagramme s'efface au profit de l'objet pensé qui se trouve *in fine* au-delà du diagramme. L'acte de connaissance est en second lieu un objet pensé qui ne prend son sens que par l'intentionnalité qui l'a fait naître. En quelque sorte, le diagramme est un vecteur d'*intentionnalité.*

Le diagramme assure la médiation entre les définitions en compréhension (intégration) et les définitions en extension (sommation), entre la jonction (intégrale fonctionnelle) et le développement asymptotique ou topologique (somme pondérée). Le diagramme feynmanien conjugue l'intension (*intensus*) et l'intention (*intentio*) dans un même repli. Dans le développement asymptotique, la conscience vise l'objet initial qui doit permettre le calcul de l'intégrale.

La principale différenciation concerne la suture entre la sommation sous forme d'une intégrale et le développement asymptotique ou topologique sur des états. Dans les techniques diagrammatiques, le *développement topologique* est une méthode de réécriture d'une somme déployée sur un ensemble de surfaces ou plus généralement de variétés. Le résultat de la sommation parce qu'il donne une valeur numérique résout localement le problème pour un ordre de grandeur donné. La sommation diagrammatique est donc une résolution. La dimension tensive des diagrammes s'ajuste dans le développement selon les facteurs de corrélation en présence. Le développement topologique consiste à résoudre une intégration dans l'intensité et une sommation dans l'extensité. Dans la généralisation des diagrammes de Feynman à des développements topologiques, le caractère fonctoriel du diagramme entre des grandeurs intensives et des surfaces naît de ce passage entre des objets de nature différente.

### La polarisation du vide

Le vide de la physique ne doit pas se penser à l'écart de l'Être. C'est un espace virtuellement peuplé, un pur devenir qui ne demande qu'à s'actualiser. Il n'est qu'un cas particulier de la double nature des choses où il est impossible de délimiter l'actuel et le virtuel. Car dans l'espace physique, les choses se dédoublent et l'on voit apparaître la figure d'un Deux. Ce Deux qui est le janus des choses montre qu'il n'est pas possible d'opérer une coupure franche entre l'actuel et le virtuel, que l'un et l'autre forment un couple inséparable de l'existant singulier. Il n'y a de virtuel que différenciant, par-delà l'actualisation des singularités mouvantes. Par conséquent, le virtuel s'ouvre à la dualité. Mais le virtuel est aussi l'Un de l'Être, donc l'Un-Deux, c'est-à-dire le multiple. Il n'y a pas de multiple comptable qui se construirait atome après atome, mais un *multiple-un.* Les choses ont cet aspect apparamment paradoxal de se déployer selon la dualité de l'actuel et du virtuel et en même temps selon les multiples variantes de l'actualisation. Comme chaque étant est l'actualisation d'un virtuel qui l'englobe, et que ce procédé d'actualisation se fait selon une multitude de points singuliers, on comprend que ce procédé assure la multiplicité des étants. Il s'ensuit pour l'électrodynamique quantique un procédé de sommation sur tous les diagrammes qui sont les interfaces de l'actuel et du virtuel sur lesquels Feynman construit sa théorie perturbative. L'apparition de quantités infinies résulte de l'intégration sur des composantes virtuelles qui ouvrent la voie à une multiplicité indéterminée d'actualisations. Cette interprétation de la divergence des intégrales feynmaniennes renforce l'idée que le virtuel finit par indéterminer les choses.

Le vide de la physique quantique est le substrat sur lequel se développent les processus d'échanges entre particules. Il est à la racine d'un déploiement théorique, comme l'est le vide mathématique comme origine de hiérarchies catégorielles. Qu'est-ce que le *réel voilé*, si ce n'est qu'un réel embrumé par les affres du virtuel ? Le vide nous permet-il d'atteindre la vraie nature du cosmos ? C'est une idée que l'on trouve déjà chez Lucrèce et qui revient dans les théories cosmologiques modernes. Le vide comme principe ontologique doit être tenu comme le nom dernier de l'Être en tant qu'Être. De là l'origine catégorielle du vide. Ce que montre le vide physique est qu'il n'y a pas de partage entre l'ontique et l'ontologique. L'Être est à l'étant ce que l'étant est à l'Être, les deux étant indissociables. Car dans l'aspect dual du vide, le virtuel pousse dans l'actuel comme autant de germes potentiels. D'où l'équivalence catégorielle du vide et de l'infini. D'où les divergences de Feynman.

Le vide quantique est lié au problème[15] de la constante cosmologique $\Lambda$ qui apparaît dans les équations d'Einstein dès 1917.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Sous certaines hypothèses, il serait lié à la constante cosmologique par une relation de la forme

$$\Lambda - \Lambda_0 = \frac{8\pi G}{c^4} \langle \rho_{vac} \rangle$$

Cette constante cosmologique est voisine de zéro comme la densité du vide $\rho_{vac}$. Mais son sens n'a pas été élucidé et plusieurs hypothèses ont été émises. L'hypothèse de Zel'dovich est que cette constante représenterait la courbure de l'espace-temps due à la densité du vide. Sans entrer dans les conséquences que pourrait avoir au plan philosophique un tel résultat s'il était démontré, nous nous contenterons ici de constater que les théories physiques actuelles relient l'infiniment petit représenté par le vide quantique à l'infiniment grand des équations de la relativité générale et conduisent à des expressions de l'énergie du vide non nulles bien que différentes.

A la fin de 1948, Feynman pensait que les diagrammes en boucles à l'ordre le plus bas comme le diagramme de l'énergie propre d'un photon et l'effet Uehling étaient associés à des intégrales divergentes qui subissaient une troncature invariante de jauge. Tous les effets de boucles fermées d'ordre supérieur comme ceux de la diffusion de la lumière sur la lumière étaient finis. Feynman était convaincu de leur conséquence :

> « Ces termes viennent des boucles fermées (dans mon jargon, que je pense vous comprenez) dans lesquelles deux quanta sont impliqués.

[15] Sur cette question, voir S.E. Rugh, H. Zinkernagel, "The quantum vacuum and the cosmological constant problem", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 33 (2002) p. 663-705.

> Les boucles avec un plus grand nombre de quanta convergent toujours et donne en réalité des réponses finies pratiquement indépendantes de la troncature, et par conséquent peuvent donc être calculées par l'électrodynamique quantique conventionnelle. En outre, il est facile de montrer que toutes les boucles ayant un nombre impair de quanta en interactions ont une contribution nulle. Vous connaissez ces choses. Il est largement répandu que la diffusion de la lumière par un potentiel n'a lieu que pour des ordres complets de deuxième degré dans le potentiel, c'est-à-dire probablement pour le quatrième ordre dans le potentiel. Je pense que vous me l'avez dit il y a quelque temps. Pour moi, il est devenu clair que tous les problèmes de l'électrodynamique quantique sont impliqués dans des problèmes plus simples (énergie propre et polarisation du vide), les plus compliqués convergent toujours. »[16]

A la conférence de Pocono, Feynman ne savait pas s'il fallait ou non inclure le terme de polarisation du vide dans l'expression de l'intégrale fonctionnelle. Les boucles fermées étaient responsables de cette polarisation et représentaient des chemins qui étaient considérés comme des voies dites *non naturelles*. Lorsque l'on sommait sur tous les chemins menant dans l'espace temps d'un point à un autre, les chemins qui reviennaient au même point devaient-ils être inclus dans le calcul ? Ils avaient un goût étrange incluant de nombreuses inversions. Mais comme les particules finissaient leurs vies dans le détecteur, le chemin devait s'arrêter et ne pas revenir en arrière. Feynman dans son article sur l'*Approche spatio-temporelle de l'électrodynamique quantique* considérait qu'il fallait exclure ces chemins. Admettre l'existence de boucles fermées aurait obligé Feynman à revoir sa théorie des positons, car le calcul de l'énergie propre d'un électron donnait à l'ordre $e^2/\hbar c$ du développement perturbatif des résultats corrects sans tenir compte de la boucle fermée.

En décembre 1949, Feynman répond à Wheeler qui propose un calcul de la diffusion de la lumière par la lumière.

> « Je suis très intéressé par les propositions que vous faites sur la relation entre absorption et dispersion, ou en d'autres termes entre des processus réels et des processus virtuels ... Le Professeur Bethe me suggéra il y a quelques temps déjà que tous ces problèmes de polarisation du vide peuvent être étudiés en considérant les processus réels comme la production de paires à laquelle ils sont corrélés comme l'absorption l'est à la dispersion. Les processus réels représentent les résidus aux pôles d'une fonction complexe. Les processus virtuels forment le reste de la description de la fonction, qui pourrait être toutefois déterminé par le caractère de ces pôles. Mais aucun de nous n'a trouvé quelque chose dans cette direction et je suis très impatient de voir plus en détails vos résultats. »[17]

Toutes les découpes du virtuel ont elles un fondement physique ? Comment Feynman partage-t-il l'espace entre l'actuel et le virtuel ? La conservation des quadrivecteurs suffit-elle à déterminer ce que nous appelons l'actuel ? Il faut se rendre à

[16] Lettre de R. Feynman à T. Welton du 30 octobre 1948, in *Richard Feynman Papers*, Millikan Library Archives, California Institute of Technology, Passadena, 3.9 (Schweber p. 451).

[17] Lettre de R. Feynman à J. Wheeler du 8 décembre 1949, in *Richard Feynman Papers*, Millikan Library Archives, California Institute of Technology, Passadena, 3.10 (Schweber p. 448).

l'évidence : la théorie quantique impose une physique qui se compose désormais de processus virtuels et de processus actuels (ou *réels* au sens de Feynman). L'image virtuelle à laquelle nous avait habitué l'optique géométrique par entrecroisement de rayons lumineux comme élément de notre perception n'est plus l'unique objet d'un monde physique impalpable. Le réel est désormais la résultante de processus virtuels. Bien plus : l'espace n'est plus pensé comme un espace euclidien tridimensionnel. Les théories de cordes suggèrent même que les particules se meuvent dans un espace-temps qui possède plus de quatre dimensions, certaines bien qu'infinies étant repliées sur elles-mêmes.

Le vide quantique déplace donc le moment du rapport à l'autre, de la négation et de la limite. Dans la théorie classique, le vide est assimilé à un néant improductif duquel rien ne sort. C'est aussi l'objet terminal de l'espace, celui où les infinis convergent. A la fois limite et négation, le vide suppose une intime relation entre matière et espace. Le vide classique est un lieu sans matière improductif, assimilé au néant, tandis que le vide quantique est un lieu où la matière peut naître. Si le vide classique est le lieu du mouvement, le vide quantique est le lieu de la création. D'un côté un espace où se meuvent des atomes, de l'autre, un espace d'où émerge la matière. D'où les difficultés de la quantification. Si la physique classique est la limite de la physique quantique lorsque la constante de Planck tend vers zéro, comment concevoir deux vides, l'un classique et l'autre quantique ? Le vide classique serait-il la limite du vide quantique ? Si comme le prétend Hegel le vide (classique) est la négation de la détermination du Non-Être, le vide quantique serait alors la négation de la détermination de l'Être, c'est-à-dire l'Un. Ce qui montre que l'Un est un Deux. Car si la négation de la négation n'est plus une affirmation, si le principe du tiers exclu n'est plus valable, on ne peut plus affirmer que l'Un est assimilé à l'unité de ses moments, ni que dans l'Un ne s'affirme que le rapport à soi-même, ou de manière équivalente que dans l'Un ne s'affirme que le rapport de la négation à elle-même. C'est donc un changement d'horizons et de topos que nous impose la physique quantique. Le sens profond de cette transformation est une déterritorialisation, un effet du principe de dualité généralisé que nous étudierons dans le dernier chapitre.

## Renormalisation et localisation

Schwinger pense qu'il y a des niveaux de complexité différents dans la connaissance des champs, et que si nous pouvions en connaître idéalement un petit nombre, ainsi que leurs interactions, cela nous renseignerait sur la véritable nature de la variété mathématique (*manifold*) du monde. La renormalisation est la frontière entre ce que nous ne connaissons pas et ce qu'il nous est donné de connaître en tant que procédure de calcul. La nature des divergences qui nous plonge sans cesse dans les méandres de l'infini n'est pas pour Schwinger une question de physique.

> « Je ne suis pas certain que j'étais complètement intéressé par la question mathématique de la convergence à tous les ordres. Je pense que ce n'est pas une question de physique. J'ai même le sentiment que je ne prends pas la renormalisabilité très au sérieux. Si en fait la théorie n'est pas renormalisable au 27$^{e}$ ordre ou à l'ordre que vous voudrez, je vous dirais : “Ok, c'est bon” parce qu'ici, c'est le lieu de ce que nous ne connaissons pas, ou plus précisément de ce qui se passe à très haute énergie, qui entre dans la théorie et nous apprendra quelque chose. Cela n'était pas important pour moi que la théorie soit renormalisable à tous les ordres. C'était déjà bien

> d'avoir une théorie valable pour les ordres les plus petits. Qu'est-ce qu'il y aurait eu de plus intéressant si cela n'avait pas marché ? »[18].

Le couplage local des champs entre eux et le fait que l'application d'opérateurs sur le vide induit des excitations locales entraînent que dans les calculs de la théorie des champs il faille nécessairement considérer des processus virtuels arbitraires ayant lieu à hautes énergies. Il n'y aucune évidence à croire que ces théories soient correctes à de telles énergies. Mathématiquement, la considération de ces processus virtuels conduit à des intégrales infinies. Les divergences sont liées intrinsèquement à la théorie locale des champs. Ces divergences montrent que l'inconsistance de l'électrodynamique quantique, si elle existe, est liée à la conception structurelle de la théorie. A ces insuffisances deux solutions ont été apportées. La première est celle de la *compensation*. Elle a été proposée par Pais en 1945 et Sakata en 1947[19]. Elle consiste à considérer des champs de particules inconnues pour annuler les divergences. La deuxième solution est la théorie de la *renormalisation*. L'idée est que les termes divergents qui interviennent dans les calculs s'interprètent de la même façon, mais dans un autre contexte comme l'introduction de termes invariants de jauge qui modifient les paramètres de masse et de charge spécialement introduits dans le lagrangien d'origine. En modifiant ces termes de masse et de charge par des facteurs renormalisants dans l'expression du lagrangien, on supprime les divergences et la théorie est de nouveau en accord avec les expériences. C'est ainsi que l'on explique les mesures faites par Lamb et Rabi sur l'atome d'hydrogène. En somme, une théorie est *renormalisable* lorsque toutes les divergences issues du développement perturbatif sont absorbables de manière consistante. Bien que déconcertante, la théorie de la renormalisation est la seule qui permette un approche analytique conforme aux expériences. Son succès tient au fait que les théories de jauge, comme l'électrodynamique quantique, la chromodynamique et la théorie électrofaible sont renormalisables. Aujourd'hui encore, nous nous demandons pourquoi la renormalisation conduit à des théories stables ? Est-ce que toutes les interactions de la nature sont renormalisables ? Est-ce que la nature ne peut être décrite que par des théories renormalisables ? Actuellement la symétrie de jauge est une des meilleures théories de l'interaction forte. Mais le choix d'une jauge reste énigmatique pour le philosophe comme pour de nombreux physiciens, car dans les théories de Yang-Mills, la symétrie de jauge n'a pas de sens physique bien qu'elle soit toujours *adéquate*. Cette adéquation suppose une notion de localité qui nous conduit à reconsidérer les aspects topologiques. Qu'est-ce qui dans le diagramme, quel opérateur, quelle transformation topologique ou quelle métamorphose peut annuler localement des divergences infinies ? C'est la question sous-jacente des travaux de Dyson.

Le programme de Dyson est de transformer la théorie de la matrice $S$ de Geoffrey Chew en l'étendant au cas des opérateurs de Heisenberg. Pondérer les diagrammes, les masses, puis les charges, enfin les constantes de couplage. Il s'agit de trouver une reformulation de l'électrodynamique quantique sans ajouter de contenu physique, simplement de trouver une théorie mathématique cohérente. Il ne s'agit pas de considérer qu'il y a une théorie de Feynman qui s'opposerait à la théorie de Schwinger, mais un ensemble d'idées qui crée une appréhension profonde du monde des rayonnements et qu'il faut rassembler ces idées en une synthèse que Dyson réussira à mettre en place. Son article (*The S-matrix in quantum electrodynamics*) ne résout pas complètement les problèmes soulevés par la renormalisation, car il s'en

[18]S. Schweber, *Op. Cit.* p. 366.

[19]Sur ce sujet voir A. Pais "On the theory of the electron and the nucleon", *Physical Review* 68 (1945) p. 227-228. et S. Sakata "The theory of the interaction of elementary particules", *Prog. Theor. Phys.* 2 (1947) p. 145-147.

tient aux premiers ordres du développement. Mais il définit au moins trois concepts nouveaux : celui des divergences primitives, des graphes-squelettes et du recouvrement de divergences[20]. Dans l'approche de Dyson, un diagramme est *primitivement divergent* si en fixant un des quadrivecteurs, l'intégrale devient convergente, ce qui du point de vue diagrammatique équivaut à un diagramme sur lequel si on ouvre une de ses lignes internes en deux lignes externes il devient convergent. Après avoir terminé son article sur la $S$-matrice, Dyson consacre toute son énergie à la théorie des mésons. Il souhaitait reprendre le formalisme hamiltonien et voulait dans l'esprit de ce qui avait été développé par Schwinger utiliser les transformations de contact pour éliminer les effets virtuels.

Si la renormalisation est souvent perçue comme une technique pour supprimer les résultats infinis qui naissent dans les calculs perturbatifs de la théorie des champs, elle est pour Dyson une méthode qui peut être utilisée pour discriminer les théories entre elles, et en particulier, un bon critère de sélection des théories qui se développent autour de l'interaction des mésons avec des nucléons. Il confie à Schweber "J'ai toujours cru que les théories renormalisables sont celles qui marchent."[21]. Car selon Dyson le développement en série perturbative est une réalité et l'électrodynamique quantique est une des théories physiques qui permet ce contact avec la réalité. Vrai signifie pour lui vérifiable par des expériences. Pour qu'une théorie soit vraie, il suffit qu'elle décrive exactement ce qui se passe dans la réalité. Et en ce sens, Dyson est un positiviste.

### Le tournant diagrammatique de la physique

Feynman est à l'origine du tournant diagrammatique de la physique. Aujourd'hui, les diagrammes ont conquis de nombreux domaines de la physique, dont la physique statistique qui utilise aussi les techniques de renormalisation. Des physiciens comme Elbaz, Penrose et Cvitanović[22] ont cherché à simplifier le calcul tensoriel par des méthodes diagrammatiques. Ils ont donné des règles de calcul des moments cinétiques des coefficients de Clebsh-Gordon ou de Wigner-Eckart en utilisant les propriétés mathématiques des groupes. Cette utilisation des diagrammes comme une nouvelle écriture pose la question du formalisme mathématique et de son universalité.

Gérard t'Hoft et Martinus Veltman ont proposé une grammaire des formes feynmaniennes publiée dans les rapports du CERN sous le titre de *diagrammar*. Le diagramme concentre alors toutes les techniques de calcul et devient une véritable grammaire nouvelle de la physique des particules[23].

---

[20]Le problème des recouvrements de divergence fut résolu par Matthews et Salam en 1951.

[21]S. Schweber, *Op. Cit.* p. 554.

[22]Sur ce sujet voir ELBAZ (Edgar), CASTEL (Boris). *Graphical methods of spin algebras in atomic, nuclear and particle physics*, New York : Dekker (1972). ELBAZ (Edgar). *Algèbre de Racah et analyse vectorielle graphique*, Paris : Ellipses (1985). Les premières techniques diagrammatiques sont dues à Jucys, voir JUCYS (A.P.), LEVINSON (I.B.), VANAGAS (V.V.). *Mathematical apparatus of the theory of angular momentum*, Vilnius, Institute for Physics and Mathematics of the Academy of Science of Lithuanian SSR, (en lithuanien), (1960). Traduction anglaise, Jerusalem, Israel Program of Scientific Translations (1962). [Le cyrillique *Jucys* est transcrit *Yutsis*]. On pourra aussi consulter PENROSE (Roger), RINDLER (Wolfgang). *Spinors and space time*, 2 vol., Cambridge University Press (1984) et CVITANOVIĆ (Predrag). *Group theory, Lie's, Tracks, and Exceptional Groups* (2002).

[23]Sur le style et la manière dont les physiciens des universités américaines et japonaises dessinaient les graphes d'interaction entre particules, voir le livre de David Kaiser, *Drawing Theories Apart. The Dispersion of Feynman Diagrams in Postwar Physics.* Chicago : University of Chicago Press (2005).

> « Dès le départ, le formalisme des opérateurs canoniques n'est pas une théorie perturbative, alors que les diagrammes sont assurément des objets perturbatifs. Utiliser des diagrammes comme point de départ semble donc être une capitulation face à la bataille pour aller au delà de la théorie des perturbations. Il est inconcevable d'accepter comme but final une théorie perturbative, et ce n'est pas dans notre propos de soutenir de telles idées. Au contraire, il est de plus en plus clair que la théorie perturbative est un procédé très utile pour découvrir de nouvelles équations et des propriétés qui restent vraies, même quand l'extension perturbative n'est plus valable. Il y a plusieurs exemples d'un tel mécanisme : au niveau le plus simple, il y a par exemple le traitement des particules instables, et pour aller vers des niveaux de profondeurs incompris, on doit citer l'équation de Callan-Symanzik. Tous ces traitements ont en commun que les propriétés sont établies sur des diagrammes et ensuite extrapolés au-delà de la théorie perturbative. Les propriétés globales sont celles qui restent valables à tous les ordres de la théorie des perturbations pour tous les diagrammes intervenant à un ordre de grandeur donné. C'est ici que très naturellement le concept de diagramme global intervient : c'est pour un ordre de grandeur donné de la théorie des perturbations, pour un nombre donné de lignes externes de tous les diagrammes contributifs. Cet objet, très souvent présenté comme une bulle, un cercle vide est supposé avoir une signification qui va au-delà de la théorie des perturbations. Pratiquement toutes les équations du formalisme canonique peuvent être réécrites à l'aide de ces diagrammes globaux, et de ce fait ouvre l'arsenal du formalisme canonique pour cette approche. »[24]

C'est aussi l'idée de Geoffrey Stedman, pour qui la méthode doit inventer de nouvelles règles élégantes et non ambiguës pour convertir des formules algébriques en diagrammes. L'élégance et la « clarté structurale » sont les qualités que doivent satisfaire les diagrammes pour garantir l'utilité de la méthode. Stedman reconnait que la diagrammatologie de Feynman est un procédé calculatoire qui continue de surpasser ses rivaux. Il reste convaincu que la qualité du diagramme et la pérennité de la méthode réside dans sa non-ambiguïté[25].

Montrons sur un exemple comment Stedman procède pour former l'addition de moments cinétiques et pour calculer l'expression des coefficients de Clebsh-Gordon, ou de leur généralisation qu'on appelle les symboles $nj$ de Wigner. Le moment cinétique $J$ d'un système formé de la réunion de deux systèmes $(S1)$ et $(S2)$ de moments $j_1$ et $j_2$ se calcule à partir du produit tensoriel des $(2j_1+1)$ vecteurs du système $(S1)$

$$|j_1, m_1\rangle \qquad \text{où } m_1 = -j_1, -j_1+1, ..., j_1-1, j_1$$

par les $(2j_2+1)$ vecteurs du système $(S2)$

$$|j_2, m_2\rangle \qquad \text{où } m_2 = -j_2, -j_2+1, ..., j_2-1, j_2$$

ce qui correspond aux $(2j_1+1)(2j_2+1)$ vecteurs propres communs à $j_1^2$, $j_2^2$, $j_{1z}$ et $j_{2z}$

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle\, |j_2, m_2\rangle$$

---

[24] G. 't Hooft et M. Veltman, *Diagrammar*, CERN Yellow Report 73-9, 1973, p. 29-30.

[25] G. Stedman, *Diagram techniques in group theory*, p. xi.

On déduit par transformation unitaire les vecteurs propres communs à $j_1^2$, $j_2^2$, $J^2$ et $J_z$

$$|j_1, j_2, J, M\rangle \qquad \text{où } J = |j_1 - j_2|, ..., j_1 + j_2 \quad \text{et} \quad M = -J, ..., J$$

Les coefficients $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 \, |J, M\rangle$ de cette transformation unitaire sont appelés les coefficients de Clebsh-Gordon

$$|j_1, j_2, J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 \, |J, M\rangle$$

Ils sont liés aux symboles $3j$ de Wigner par la relation

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + J}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 \, |J, M\rangle$$

L'addition de trois moments cinétiques $J = j_1 + j_2 + j_3$ conduit de la même manière aux symboles $6j$ de Wigner que l'on note

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}$$

Les calculs des coefficients $nj$ de Wigner ne sont pas compliqués, mais souvent très longs. D'où l'idée de simplifier le calcul par des techniques diagrammatiques. La relation de symétrie échange des nombres quantiques $j_2$, $k_2$ et $j_3$, $k_3$. Elle a pour formule

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix}$$

et est souvent utilisée pour simplifier les calculs. Elle se présente diagrammatiquement sous la forme suivante (voir fig. 24).

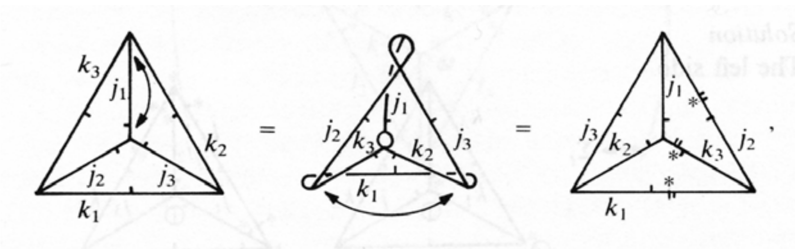



FIG. 24. Cœfficients de Wigner, in G. Stedman, *Diagram techniques in group theory*, p. 45

Le triangle représente la valeur du coefficient. L'échange des nombres quantiques provoque une torsion qui se résout simplement en un nouveau triangle, symbole d'un autre coefficient de Clebsh-Gordon. La simplicité de la transformation permet de voir immédiatement l'égalité des coefficients.

Un autre exemple en théorie quantique des champs est le calcul des traces qui a été introduit par Cvianović et de nombreux collaborateurs[26]. Les trois relations sur les matrices de Dirac

$$tr(\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}...\gamma^{\alpha_{2n+1}}) = 0$$
$$tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) = 4g^{\mu\nu}$$
$$tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}) = 4(\delta^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} + \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha})$$

se traduisent diagrammatiquement par les schémas de la figure 25.

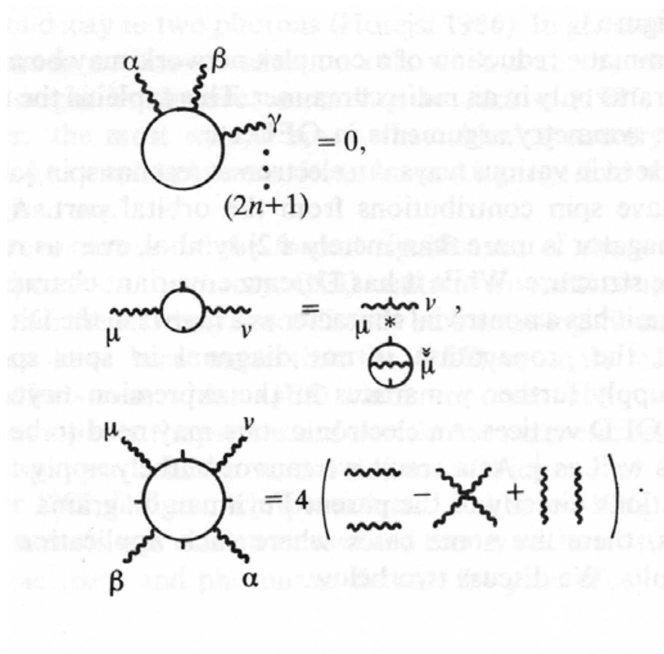



FIG. 25. Calcul de traces in G. Stedman, *Diagram techniques in group theory*, p. 275

Cette curieuse identité entre un tenseur et un diagramme n'a pour but que de simplifier la tâche du physicien : fournir une méthode de calcul plus adaptée à la manipulation d'indices en substituant l'image indicielle par une image diagrammatique. Dans la plupart des cas, il s'agit toutefois d'une simple transcription où on abandonne un formalisme pour un autre. L'exemple d'une démonstration algébrique que nous allons voir maintenant par des techniques diagrammatiques est encore plus significatif.

Cet exemple est le calcul des relations de commutation entre opérateurs de création et d'annihilation de particules pour des opérateurs d'isospin d'un système à deux états

$$T_+ = b_2^\dagger b_1 \qquad T_3 = \frac{1}{2}(b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1)$$

[26]Sur ce sujet, voir : Canning G.P. *Phys. Rev. D* 18 (1978) p. 395-410. Butera P., Cicuta G.M. Enriotti M. *Phys. Rev.* D 21 (1980) p. 972-978. Kennedy A.D. *Phys Rev. D* 26 (1982) 1936-1955. Cvitanovic P. *Phys. Scripta* 26 (1982) p. 5-14.

Effectuons le calcul algébrique du commutateur $[T_3, T_+]$. On a successivement

$$\begin{aligned}[T_3, T_+] &= T_3T_+ - T_+T_3 \\ &= \frac{1}{2}(b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1)b_2^\dagger b_1 - \frac{1}{2}b_2^\dagger b_1(b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1) \\ &= \frac{1}{2}(b_2^\dagger b_2 b_2^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_1 b_1^\dagger b_1)\end{aligned}$$

Comme $[b_2, b_2^\dagger] = 1$ équivaut à $b_2 b_2^\dagger = 1 + b_2^\dagger b_2$, on en déduit l'expression de

$$\begin{aligned}[T_3, T_+] &= \frac{1}{2}\left[b_2^\dagger(1 + b_2^\dagger b_2)b_1 - b_2^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger(1 + b_1^\dagger b_1)b_1\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 + b_2^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_1\right]\end{aligned}$$

qui se simplifie en considérant que $[b_1, b_2^\dagger b_2] = 0$ et $[b_1^\dagger b_1, b_2^\dagger] = 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned}[T_3, T_+] &= \frac{1}{2}\left[b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 + b_2^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 - b_2^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1 + b_2^\dagger b_1\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[b_2^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_1\right] = T_+\end{aligned}$$

Le commutateur $[T_3, T_+]$ est donc égal à l'opérateur $T_+$. La même démonstration par une méthode diagrammatique a été proposée par Stedman[27] Elle simplifie beaucoup le formalisme, utilise moins de lignes, mais nécessite un rude apprentissage (voir fig. 26). A y regarder de près, les arguments de la démonstration sont toutefois les mêmes.

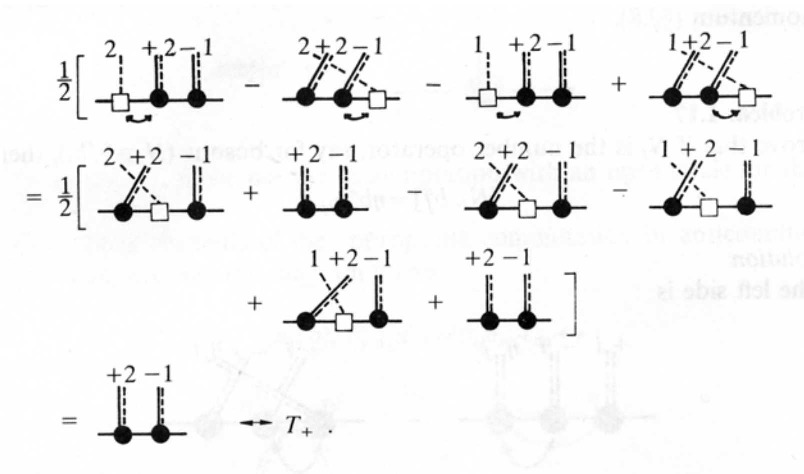



FIG. 26. Calcul de commutateurs, in G. Stedman, *Diagram techniques in group theory*, p. 24

La question que pose le physicien s'oriente donc vers la création d'un nouveau formalisme substituant à l'actuel ensemble de symboles, un ensemble de diagrammes. La tâche principale des scientifiques est alors de construire une nouvelle grammaire qui soit un substitut formel aux représentations tensorielles et de fournir une véracité immédiate des formules que représente l'ordre diagrammatique.

[27] G. Stedman, *Diagram techniques in group theory*, p. 24.

### Les diagrammes de Penrose et la question du formalisme

Pour certains physiciens, le diagramme enferme quelque chose d'essentiel de la physique. Pour d'autres il n'est qu'un moyen mnémotechnique ou un raccourci de techniques calculatoires. Dans la démarche démonstrative, le diagramme est un relai de l'imagination créatrice du mathématicien, un tremplin qui à la fois ouvre et relance le champ opératoire. La stupéfiante fécondité des diagrammes tient, au moins en quelque manière, à leur art. Lorsque la machine est trop bien huilée, le digramme perd en partie cette dimension esthétique pour ne plus être qu'une écriture formelle. Dans le langage de Penrose, il s'agit principalement de remplacer le calcul tensoriel qui manipule de nombreux indices en position supérieure ou en position inférieure par une méthode diagrammatique simplicatrice construite sur des règles élémentaires inspirées des diagrammes de Feynman. A chaque symbole algébrique est associé un élément géométrique simple duquel partent des lignes figurant les indices. L'entrelacement de ces lignes décrit les positions indicielles. Sur la figure 27, une demi-lunule à quatre branches représente un tenseur à quatre indices. Un trapèze figure un tenseur à trois indices. Le symbole de Kronecker est représenté par une ligne droite. Les branches des indices supérieurs pointent vers le haut, alors que les branches des indices inférieurs sont tournées vers le bas. La figure donne un exemple d'expression tensorielle complexe, qui se résout par des manipulations graphiques. Chaque pictogramme représente la même succession d'indices : en haut et de gauche à droite : $\alpha$ et $\beta$, et en bas : $\rho, \sigma, \tau$.

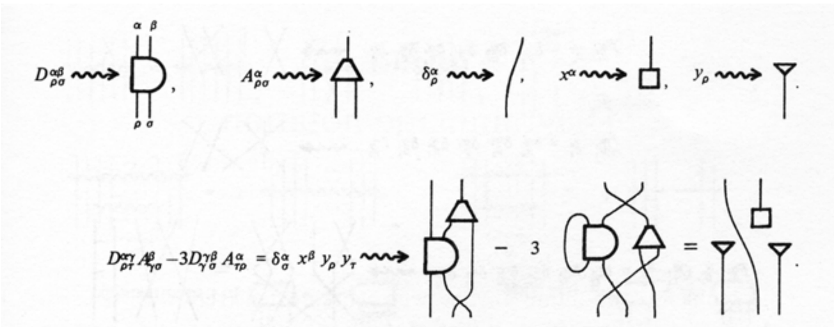



FIG. 27. R. Penrose, Représentations tensorielles I

Les produits de symboles de Kronecker sont interprétés comme des forêts de droites disposées comme des tresses, mais dans lesquelles on ne distingue pas l'ordre du croisement selon que le brin gauche passe au-dessus ou au-dessous du brin droit. Le produit de deux tenseurs $P$ et $Q$ est la simple superposition de la tresse $P$ au-dessus de la tresse $Q$ (voir fig. 28). Comme dans ce type de formalisme, le double croisement d'un même brin équivaut à une composition par l'identité, l'annulation des croisements doubles simplifie la représentation diagrammatique. Le physicien doit simplement considérer les manipulations indicielles, qui doivent se conformer à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. La première ligne représente les rangs des indices hauts et la ligne inférieure les rangs des indices bas.

Ce que montre le langage de Penrose est qu'il existe un niveau formel plus profond que celui de la logique, où l'opératoire se substitue à l'inférence et donne à voir dans l'immédiateté de l'expression graphique un état de chose en deçà du formel[28]. On pourrait se demander si le projet de Penrose n'est pas d'établir une

[28]Voir aussi Jean-Jacques Szczeciniarz , "Sur la transformation de Penrose", in *Epistémologique*, Numéro spécial, 2000.

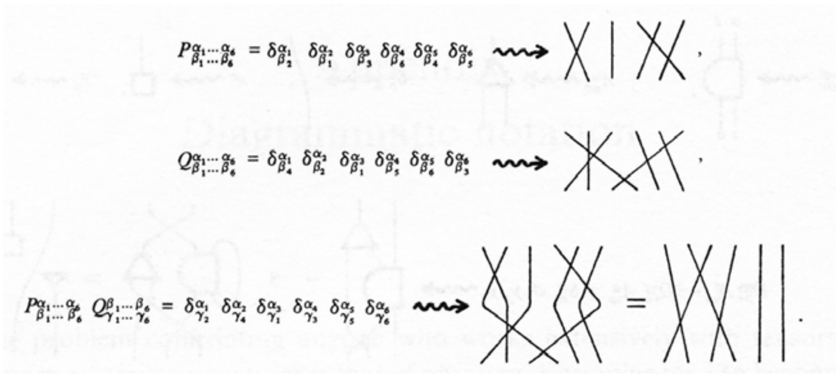


FIG. 28. R. Penrose, Représentations tensorielles II

version moderne d'une « grammaire générale et raisonnée » des lois de la physique, une langue universelle qui relirait de manière intime les objets mathématiques à leur opératoire. Ainsi la fonction de cette *mathesis universalis* serait de situer les conditions d'une pensée mathématique dans la liaison des objets à leur opératoire, ou dans le langage des catégories dans l'interstice entre objets et morphismes. Mais le langage de Penrose n'a pas vocation à l'universalité de la physique. Comme le diagramme de Feynman, il associe une figure à des expressions algébriques et présente une forte similarité avec les techniques diagrammatiques de théorie des nœuds ou celles développées par Cvitanović et d'autres. La figure 29 montre cette conjonction entre la théorie des nœuds et les méthodes tensorielles où la manipulation de tenseurs d'un nombre indéterminé d'indices évolue selon l'entrelacement des brins d'une tresse.

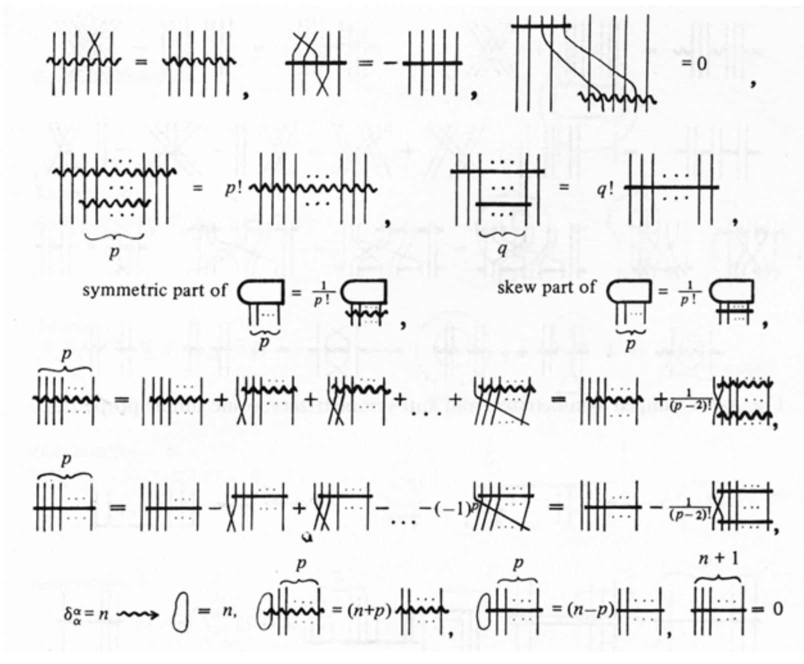



Figure 29

FIG. 29. R. Penrose, Représentations tensorielles III

Selon Penrose, le langage n'est pas adapté au mode d'expression scientifique. Pour exprimer une idée mathématique, il faut inventer une autre langue.

> « Presque toute ma réflexion mathématique se fait visuellement et en termes de concepts non verbaux, même si les pensées s'accompagnent très souvent d'un commentaire verbal vide et presque inutile, tel que "telle chose va avec telle chose et telle chose va avec telle autre chose". (Je peux parfois utiliser des mots pour de simples inférences logiques.) De même, la difficulté que ces penseurs ont eue à traduire leurs pensées en mots, est quelque chose dont je fais souvent moi même l'expérience. Fréquemment, la raison en est simplement que les mots n'existent pas pour exprimer les concepts requis. En fait, je calcule souvent en utilisant des diagrammes spécialement conçus qui constituent une sténographie de certains types d'expressions algébriques. Ce serait en effet très lourd d'avoir à traduire en mots ces diagrammes, et c'est quelque chose que je ne fais qu'en dernier recours s'il devient nécessaire de donner à autrui une explication détaillée. J'ai pu également observer qu'à l'occasion, si j'ai passé un certain temps à me concentrer intensément sur des mathématiques, et que quelqu'un m'entraîne soudainement dans une conversation, je me trouve presque dans l'incapacité de parler, plusieurs secondes durant.
>
> Cela ne veut pas dire que je ne pense pas quelquefois en mots, mais seulement que les mots me paraissent presque inutiles pour la pensée *mathématique.* Peut-être que d'autres modes de pensée, par exemple le *mode philosophique* sont plus propices à l'expression verbale. C'est peut-être la raison pour laquelle tant de philosophes sont d'avis que le langage est essentiel à la pensée intelligente ou consciente. » [29]

Comment les mathématiques pourraient-elles se passer de mots ? Les diagrammes expriment-ils quelque chose de plus profond que notre langage ? Pour Penrose, notre langue ne peut exprimer que des inférences simples. La complexité du monde est hors de ce que nous pouvons dire et accessible diagrammatiquement. Ou pour contredire Wittgenstein[30], les limites de notre monde ne sont pas les limites de notre langage. Pour déplacer ces limites, Penrose construit une diagrammatique des équations de physique la plus étendue possible. La figure 30 montre la richesse de ses diagrammes.

Non seulement le diagramme représente des expressions algébriques, mais il est l'instrument de nouvelles preuves. Dans la démonstration de l'identité de Bianchi (fig. 31), les transformations portent sur des sous-parties de diagrammes auxquelles on applique des résultats obtenus par ailleurs. Le moteur de la démonstration reste toutefois inchangé puisqu'il consiste à employer des expressions équivalentes définies par l'égalité de deux diagrammes et les manipulations algébriques élémentaires : addition ou soustraction de diagrammes. La multiplication et la division ne sont pas utilisées ici, bien qu'elles existent, comme nous l'avons vu pour le produit de symboles de Kronecker (fig. 28).

En conséquence, on peut se demander ce que les diagrammes de Penrose apportent à la connaissance ? Est-ce une lisibilité renouvelée ? Ou existe-t-il une signification plus profonde ? Nous avons vu que ces diagrammes définissent une langue

[29] R. Penrose, *L'Esprit, l'ordinateur et les lois de la physique*, p. 462.

[30] "Les limites de mon langage signifient les limites de mon propre monde.", Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (5.6).

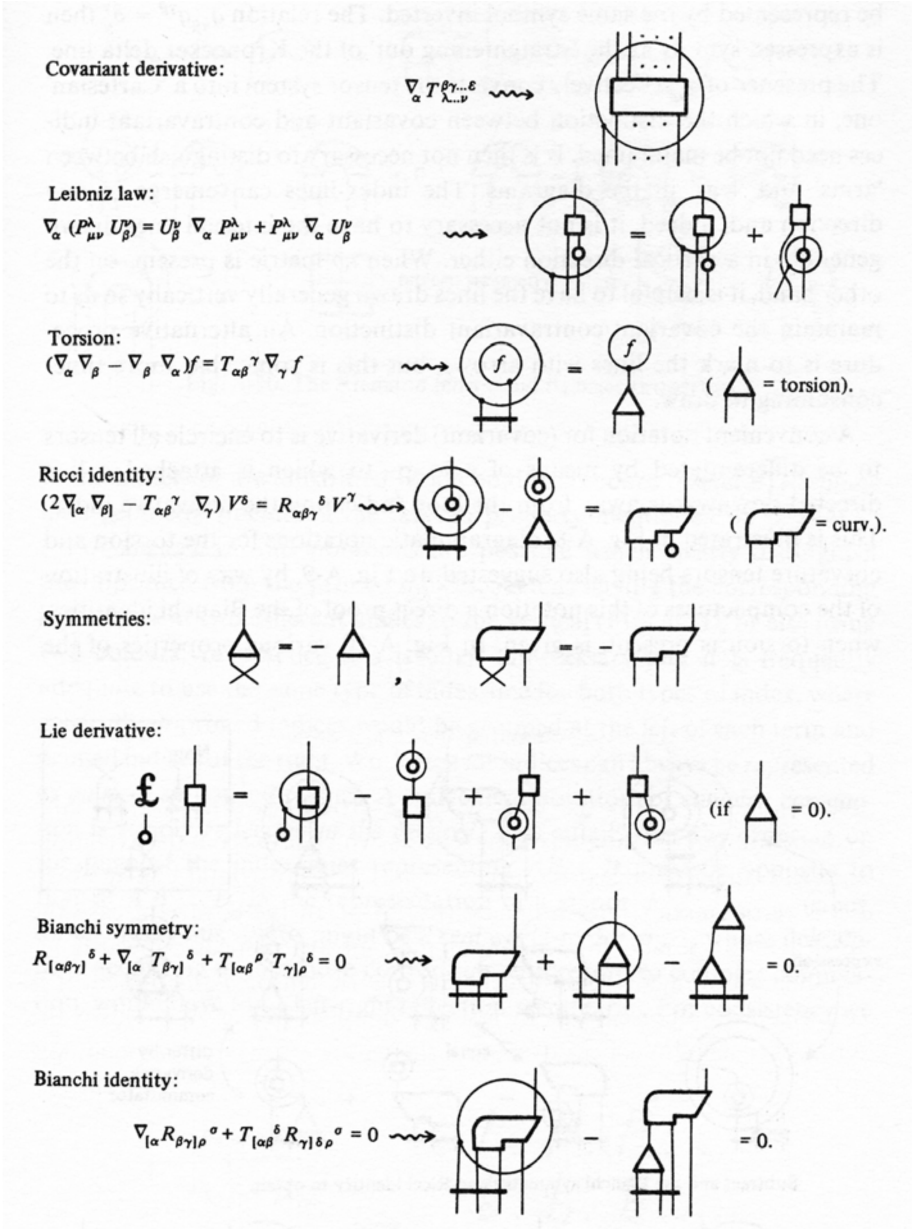



Figure 30

FIG. 30. R. Penrose, Calcul différentiel diagrammatique

dont la syntaxe mime les manipulations algébriques. La question porte donc sur la sémantique. Dans les sciences physico-mathématiques plusieurs voies semblent confluer vers une même destination, bien que celle-ci ne soit pas encore clairement déterminée, et qui pourraient prochainement définir les bases d'une l'algèbre diagrammatique. Contrairement aux diagrammes de Feynman qui ont été transposés de l'électrodynamique quantique aux interactions fortes, les diagrammes de Penrose sont restés un langage formel qui n'a pas encore donné tout le développement de ses potentialités.

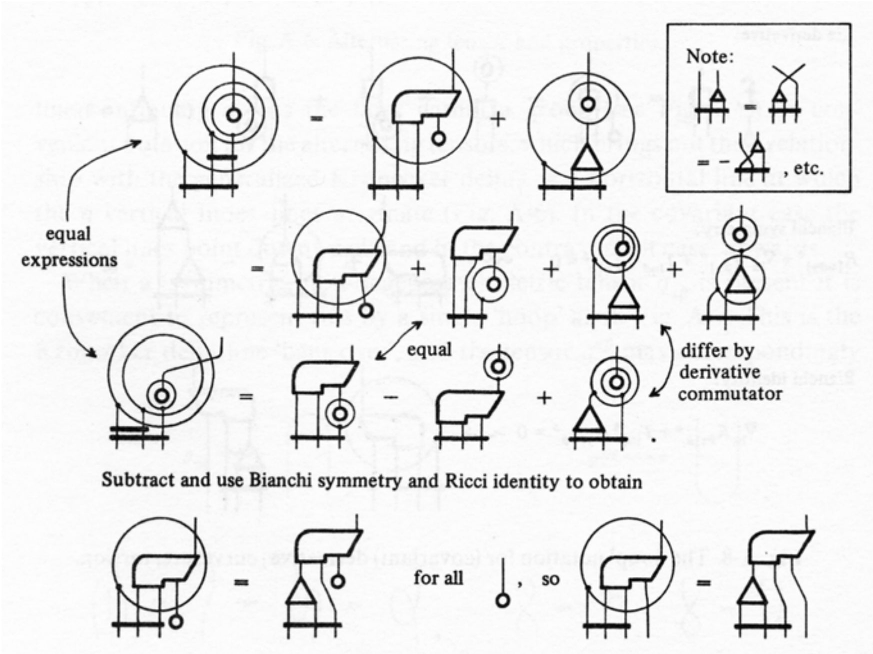



FIG. 31. R. Penrose, Démonstration de l'identité de Bianchi

### Les nœuds virtuels de Kauffman

En mathématiques, la théorie des nœuds a pris un nouvel essor avec la découverte du polynôme de Jones, qui constituait le premier invariant de cette théorie. On s'aperçut toutefois que cet invariant ne caractérisait pas complètement les diagrammes de nœuds premiers, puisque deux nœuds différents pouvaient avoir le même polynôme de Jones. On chercha donc de nouveaux invariants sous la forme de nombres, de polynômes ou de groupes jusqu'à ce que Vassiliev proposa un nouvel invariant. Dans la représentation des nœuds, on distinguait soigneusement les croisements des brins selon que le brin droit passait au-dessus ou au-dessous du brin gauche. Puis récemment, Louis Kauffman[31] introduisit un troisième type de croisement qui n'est ni au-dessus, ni au-dessous et qu'il qualifia de virtuel.

Pour comprendre de quoi il s'agit, imaginons un nœud entrelacé sur un tore. Lorsque le brin du nœud passe en un point, à la verticale du brin qui se trouve sur un rayon du tore diamétralement opposé, il y a, si le tore n'existait pas, un croisement des brins. C'est ce croisement que Kauffman considère en le généralisant à d'autres surfaces que le tore. Ce croisement est virtuel en ce sens qu'il concerne des points situés sur des feuillets séparés.

Kauffman introduit le calcul du crochet comme dans le cas classique, mais en le limitant à ces nouveaux croisements. Il transpose l'algèbre des diagrammes de cordes à ce type de croisement. Puis, il construit les diagrammes de cordes virtuels comme dans le cas classique (fig. 33).

Ces diagrammes représentent l'ossature des croisements du nœud. Ils décrivent l'agencement des croisements relativement les uns par rapport aux autres. Ces diagrammes forment une algèbre où on peut virtuellement les additionner et définir un produit tensoriel.

[31] L. Kauffman, "Virtual knot theory", *European J. Combin.* 20 (1999) 663–690.

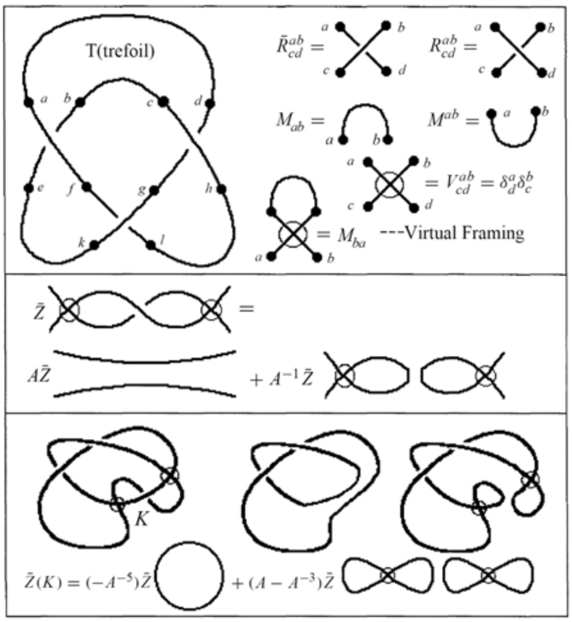



FIG. 32. L. Kauffman, Nœuds virtuels

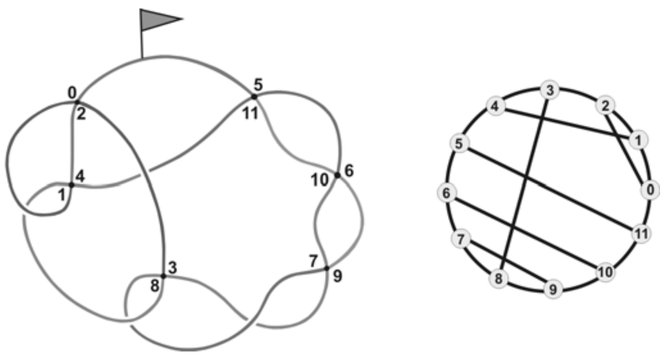
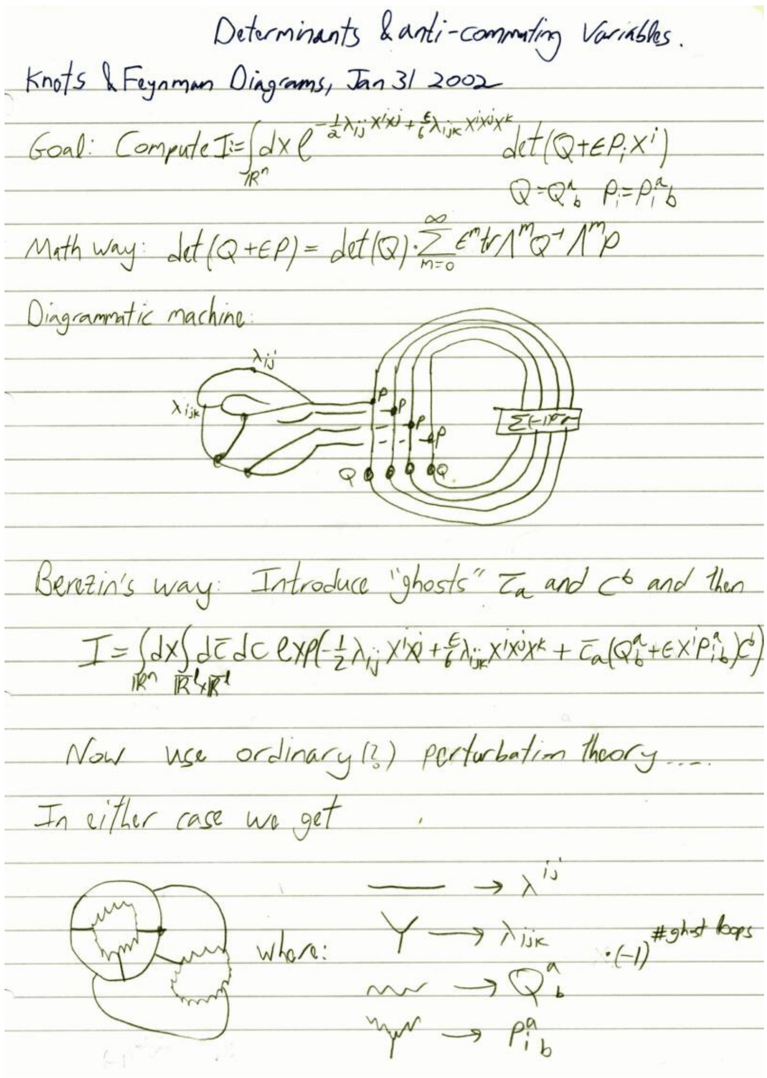


FIG. 33. Diagramme de cordes

Ce que cherche Kauffman dans ces puits de virtualités est de faire parler les points de croisements, pour qu'ils nous révèlent la nature profonde des relations que nouent la physique et la théorie mathématique des entrelacs. Une recherche qui se développe à partir des diagrammes de Feynman, comme le montre le transparent de Félix Berezin (fig. 34) pour pénétrer plus avant l'intuition physico-mathématique et donner accès à cet espace d'entrelacement des singularités diagrammatiques.



Determinants & anti-commuting Variables.

Knots & Feynman Diagrams, Jan 31 2002

Goal: Compute $I := \int_{\mathbb{R}^n} dx\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_{ij}x^ix^j + \frac{\epsilon}{6}\lambda_{ijk}x^ix^jx^k} \det(Q + \epsilon P_i x^i)$

$Q = Q^a_b \quad P_i = P^a_{i\,b}$

Math way: $\det(Q+\epsilon P) = \det(Q) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \operatorname{tr} \Lambda^m Q^{-1} \Lambda^m P$

Diagrammatic machine:



Berezin's way: Introduce "ghosts" $\bar{c}_a$ and $c^b$ and then

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^{l} \times \mathbb{R}^{l}} d\bar{c}\, dc\, \exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda_{ij}x^ix^j + \tfrac{\epsilon}{6}\lambda_{ijk}x^ix^jx^k + \bar{c}_a(Q^a_b + \epsilon x^i P^a_{i\,b})c^b\right)$$

Now use ordinary (?) perturbation theory ...

In either case we get

where: $\longrightarrow \lambda^{ij}$

$Y \longrightarrow \lambda_{ijk}$ $\cdot(-1)^{\#\text{ghost loops}}$

$\longrightarrow Q^a_b$

$\longrightarrow P^a_{i\,b}$

FIG. 34. F. Bérezin, Déterminants et variables anti-commutantes

CHAPITRE 4

# Logiques des topoi

Créée à l'origine par Alexandre Grothendieck[1] pour les besoins de la géométrie algébrique, la notion de *topos* est en quelque sorte une généralisation de la notion d'espace, qui a été interrogée par Lawvere et Tierney pour repenser les fondements des mathématiques et traiter des problèmes de logiques. Aujourd'hui, les idées de Grothendieck sont devenues familières à la plupart des mathématiciens. Schémas, topos, motifs, cohomologie étale sont quelques unes des notions qui ont été introduites par Grothendieck et qui ont révolutionnées la géométrie algébrique. C'est la notion de topos qui, aujourd'hui et après les travaux de Grothedieck, pose le plus de problèmes philosophiques, car elle subsume la logique sous la topologie. Dans un topos, la logique naît de la simple considération de sa topologie. C'est le topos qui décide de sa logique. Dans un topos booléen, la logique est classique, alors que dans un topos non booléen, la logique est intuitionniste : la loi du tiers exclu ne s'applique plus. La seule considération du topos détermine les règles d'inférence. On

[1]Alexandre Grothendieck (né en 1928) soutient sa thèse en 1953 à l'Université de Nancy. Il bénéficie du soutien de Léon Motchane, qui avait fait fortune et qui, voulant faire œuvre de bienfaisance, crée l'*Institut des Hautes Études Scientifiques* (IHÉS) à Bures-sur-Yvette. C'est dans cet institut que Grothendieck séjourne de 1958 à 1970 et reçoit la médaille Fields en même temps que le mathématicien américain Stephen Smale en 1966. Dans le climat de guerre froide, convaincu de la justesse de ses positions contre la guerre du Vietnam, il refuse de se rendre à la cérémonie de Moscou. Quatre ans plus tard, il découvre que l'IHÉS reçoit des fonds militaires, et décide de quitter l'Institut. Il milite alors pour des causes antimilitaristes et écologistes et fonde le mouvement *Survivre et Vivre*. En 1973, il est professeur à l'Université de Montpellier. Découragé par l'enseignement, il est candidat à un poste au CNRS et rédige à cette occasion *Esquisse d'un programme*. Sa candidature n'est pas retenue. Il est officiellement retraité de l'Université depuis le 10 janvier 1988. Cette même année, il refuse le prix Crafoord qui lui a été décerné, ainsi qu'à Pierre Deligne. L'œuvre mathématique et littéraire de Grothendieck est volumineuse. La première publication importante de Grothendieck "Sur quelques points d'algèbre homologique" est connue sous le nom de Tôhoku parce qu'elle a été publiée en 1957 au Japon dans le *Tôhoku Mathematical Journal*. Outre les articles de recherche, il a rédigé avec Dieudonné de 1960 à 1967, les huit tomes des *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA), puis avec quelques élèves, les premiers tomes du *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* (SGA). A partir des années 80, il publie *La longue marche à travers la théorie de Galois* (1981), *À la poursuite des champs* (1983), *Récoltes et semailles* (1983-85), *Les dérivateurs* (1987), *La clef des songes* (1986). *La longue marche à travers la théorie de Galois* a été publiée en partie en 1995 à l'Université de Montpellier II par Jean Malgloire à qui Grothendieck avait confié le manuscrit. Les idées mathématiques de *Pursuing Stacks* (*À la poursuite des champs*) ont été reprises et débattues par le groupe de travail "Algèbre et topologie homotopiques", puis publiées par Georges Maltsiniotis, sous le titre *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, 301 (2005) 1-140. *Récoltes et semailles* s'ouvre par une lettre de mai 1985 : « Comme tu le sais, j'ai quitté "le grand monde" mathématique en 1970, à la suite d'une histoire de fonds militaires dans mon institution d'attache (l'IHÉS). Après quelques années de militantisme antimilitariste et écologique, style "révolution culturelle", dont tu as sans doute eu quelque écho ici et là, je disparais pratiquement de la circulation, perdu dans une université de province Dieu sait où. La rumeur dit que je passe mon temps à garder des moutons et à forer des puits. La vérité est qu'à part beaucoup d'autres occupations, j'allais bravement, comme tout le monde, faire mes cours à la Fac (c'était là mon peu original gagne-pain, et ça l'est encore aujourd'hui). Il m'arrivait même ici et là, pendant quelques jours, voire quelques semaines ou quelques mois, de refaire des maths à brin de zinc — j'ai des cartons pleins avec mes gribouillis, que je dois être le seul à pouvoir déchiffrer. » A. Grothendieck, *Récoltes et semailles,* L3.

en déduit que ce n'est plus la logique ni l'onto-logique qui est déterminante, mais la topologie au sens de science des topoi et la philosophie du lieu qui devient le centre de la réflexion et ouvre la voie à une *onto-(po)-logie* ou *ontologie toposique*.

### La notion de topos

Dans *Récoltes et semailles*[2], Grothendieck définit les douze thèmes majeurs de son œuvre. Parmi ces douze thèmes, nous n'en retiendrons que trois qui s'enchaînent dans une progression à la fois temporelle et conceptuelle. C'est la notion de *motif* dont la genèse vient des *topoi*, qui eux-mêmes viennent de la notion de *schéma*. Le mot *schéma* a d'ailleurs été inventé par Claude Chevalley vers 1955 qui l'identifie au squelette d'une variété algébrique. Chez Grothendieck, ce schéma désigne une manière de coder un ensemble d'équations et leurs transformations. Pour Grothendieck, le schéma[3], c'est la machinerie qui construit l'espace et l'ensemble de ses points. Mais la genèse de la notion de schéma et de topos n'est pas aussi simple que cette ligne d'emboîtements qui part de la notion de schéma pour aboutir à celle de topos. D'ailleurs, après un commentaire sur les catégories dérivées et les cristaux ainsi que sur l'apport de Zoghman Mebkhout aux mathématiques, Grothendieck fait remonter la genèse de l'ébauche de la notion de topos à celle de *site*.

> « J'en viens au deuxième couple de notions dont je voulais parler, celle de *schéma*, et celle étroitement apparentée de *topos*. Cette dernière est la version plus intrinsèque de la notion de *site*, que j'avais d'abord introduite pour formaliser l'intuition topologique d'une "localisation". (Le terme "site" a d'ailleurs été introduit ultérieurement par Jean Giraud, qui a beaucoup fait aussi pour donner aux notions de site et de topos toute la souplesse nécessaire.) Ce sont des besoins flagrants qui m'ont conduit à introduire coup sur coup schémas et topos. Ce couple de notions contient en puissance un renouvellement de vaste envergure aussi bien de la géométrie algébrique et de l'arithmétique, que de la topologie, par une synthèse de ces "mondes", trop longtemps séparés, dans une intuition géométrique commune. »[4]

Les termes qu'emploie Grothendieck (site, topos, motif) évoquent tous des problèmes de *territorialisation*. Ils ont été inventés pour « formaliser l'intuition topologique d'une localisation » caractériser les limites de notre propre monde. Dans des univers possibles, le territoire se définit par des propriétés structurelles fortes, ou mieux catégorielles. Ce sont ces propriétés qui caractérisent le topos. Il ne s'agit pas d'une disposition logique qui serait corrélée de manière immanente à une disposition d'univers, mais une disposition topique, non d'un lieu commun, mais d'un lieu singulier. L'état ontologique d'un objet est lié à la description du topos dans lequel il s'inscrit et induit des propriétés catégorielles. Le motif est pour Grothendieck le plus récent et le plus profond de ses douze thèmes, l'un des plus féconds qui se trouve étroitement lié aux questions actuelles et à ce qu'il appelle le *yoga de Galois–Teichmüller*. Les schémas, la cohomologie étale et $\ell$-adique sont à l'époque où il rédige *Récoltes et semailles* des outils très puissants qui « font partie des quelques grands acquis du siècle, venus nourrir et renouveler notre science au cours

[2] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles*, p. 20.

[3] En géométrie algébrique, un *schéma* est un espace localement annelé isomorphe localement au spectre d'un anneau commutatif unitaire muni de son faisceau structural. Un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace topologique $X$ muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ dont les tiges sont des anneaux locaux.

[4] *Ibid. II*, p. 180.

de ces dernières générations. » Schémas et topoi sont une réponse contrapunctique aux diagrammes et catégories.

Le séminaire du Bois-Marie avait pour but de développer la cohomologie étale des schémas. Le plan en avait été publié[5], mais l'importance grandissante de la notion de topos a contraint les organisateurs a changé le nom du séminaire : au lieu de *Cohomologie étale des schémas*, SGA4 est devenu *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Ce changement de nom est significatif de l'importance de la notion de topos ainsi que l'explique Grothendieck dans la *Préface* à la deuxième édition « tant pour fournir un cadre commode et intuitif pour les techniques de la descente et le passage au quotient (indispensables dans pratiquement toutes les questions de *construction de schémas*), que pour développer d'autres *théories cohomologiques pour les schémas*, mieux adaptées à certaines questions que la cohomologie étale (telles la cohomologie fppf, ou la cohomologie "cristalline" des schémas) » C'est la première pierre dans l'évolution du schéma en topos, qui se poursuivra mais restera inachevé en passant des topoi aux motifs[6].

D'un point de vue mathématique, un topos est une catégorie dans laquelle on a toutes les limites et les colimites finies, des exponentielles[7] et un classificateur de sous-objet. Un classificateur de sous-objet est un objet $\Omega$ et un monomorphisme $t : 1 \to \Omega$ représentant le vrai, tel que pour tout objet $Y$ du topos, tout monomorphisme $s : X \to Y$ soit le pullback de $t$ par une flèche unique $\varphi : Y \to \Omega$. Autrement dit, tel que le diagramme de gauche suivant commute, et de manière universelle (pour tout autre diagramme comme celui de droite, il existe un unique $f : X' \to X$ tel que $s' = s.f$).

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 1 \\ s\downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & 1 \\ s'\downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \end{array}$$

[5]Le plan du Séminaire de Géométrie-Algébrique (SGA) du Bois-Marie [du lieu-dit où est implanté l'IHÉS] est annoncé dès la publication du premier tome. L'ensemble des exposés est publié en sept volumes. SGA 1. *Revêtements étales et groupe fondamental*, 1960 et 1961. SGA 2. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, 1961 et 1962. SGA 3. *Schémas en groupes*, 1963-1964, (3 volumes), un séminaire dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Artin, J.E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud, J.P. Serre. Tome 1, *Propriétés générales des schémas en groupes.* Tome 2, *Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux.* Tome 3, *Structures des schémas en groupes réductifs.* SGA 4. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, 1963-1964 (3 tomes), un séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne, B. Saint-Donat. Tome 1, Exposés I à IV. Tome 2, Exposés V à VIII. Tome 3, Exposés IX à XIX. SGA 4 1/2. *Cohomologie étale* par P. Deligne avec la collaboration de J.F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.L. Verdier. SGA 5. *Théorie 2-adique et fonctions L*, 1964-1965 (2 tomes). SGA 6. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, 1966-1967 (2 tomes) Un séminaire dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie avec la collaboration de D. Ferrand, J.-P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud, J.P. Serre. SGA 7. *Groupes de monodromie en géométrie algébrique.* Tome 1, dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud et D.S. Rim. Tome 2, par P. Deligne et N. Katz. Le Séminaire SGA 4 1/2 n'était pas prévu initialement. Il a été publié par Pierre Deligne après que celui-ci ait annoncé en 1974 la démonstration complète des conjectures de Weil. Cela n'était pas du goût de Grothendieck. Peu avant son départ pour Princeton, Pierre Deligne rend visite à Alexandre Grothendieck (du 20 au 22 octobre 1984). La question de cette publication ne sera toutefois pas abordée.

[6]La notion de motif a été développée par Valdimir Vœvodsky (médaille Fields 2002) comme catégorie d'objets qui est le lieu des invariants géométriques, où chaque schéma défini un motif particulier.Voir aussi les travaux de Yuri Manin, en particulier, "Correspondences, motifs and monoidal transformations", *Mat. Sborn.*, 77, 119 (1968), 475-507. *fppf* est l'abréviation de topologie fidèlement plate de présentation finie

[7]Le foncteur produit binaire a un adjoint à droite relativement à une variable $Hom(X{*}Y, Z) = Hom(X, Z^Y)$. Pour un ensemble $X$ muni d'une topologie, on définit l'exponentielle de $A$ et $B$ par $A^B = int(A^c \cup B)$.

La catégorie des ensembles et la catégorie des faisceaux sur un espace topologique sont des topoi. Le topos de Grothendieck qui est la catégorie des faisceaux sur un site est aussi un topos. Le classificateur d'un topos s'interprète comme l'ensemble des valeurs de vérité du topos. Dans le topos de la catégorie des ensembles, le classificateur de sous-objet est l'ensemble $\{0,1\}$. Ce classificateur détermine la logique interne du topos (vrai (1) ou faux (0) dans l'exemple du topos des ensembles). Le classificateur de sous-objet est une algèbre de Heyting. Lorsque cet ensemble est une algèbre de Boole, la logique est classique. La logique appartient donc à la structure immanente du topos. C'est une des caractéristiques de l'ontologie catégorielle ou toposique.

La notion de topos est impliquée par celle de topologie d'où le topos tire son nom. S'il est vrai que la notion de topos formalise axiomatiquement la notion de catégorie de faisceaux, il est toutefois difficile de comprendre en quoi le topos est lié à la topologie. C'est parce qu'il généralise la notion d'espace topologique, ainsi que l'explique Grothendieck dans SGA4 :

> « Dans le présent exposé, nous donnons une caractérisation des topos par des propriétés d'exactitude simple (due à J. Giraud), nous étudions la notion naturelle de morphisme de topos, inspirée de la notion d'application continue d'un espace topologique dans un autre, et nous développons dans le cadre des topos certaines constructions familières en théorie des faisceaux habituelle (faisceaux Hom, faisceaux produit tensoriel, supports). Enfin, nous montrons (en suivant M. Artin) comment on peut reconstituer un topos à partir d'un "ouvert" de celui-ci, du "fermé" complémentaire, et d'un certain foncteur exact à gauche qui les relie, qui, à peu de choses près, peut être choisi d'ailleurs arbitrairement. On a là un procédé de recollement de topos qui, appliqué à des topos provenant d'espaces topologiques ordinaires, donnera en général un topos qui ne sera plus du même type. Cela est une première indication de la stabilité remarquable de la notion de topos par divers constructions naturelles, qui manque à la notion d'espace topologique (dont la notion de topos est inspirée). »[8]

Lorsque l'on sait qu'une topologie sur un espace $X$ est définie par ses ouverts, par ses fermés, par ses voisinages, ou encore et de manière équivalente par les applications continues sur cet espace, on comprend que si le topos peut être construit à partir d'un ouvert en lui "ajoutant" ses autres ouverts, il se trouve ainsi affilié à sa topologie. Cette topologie est d'autant plus importante que c'est elle qui va déterminer la logique associée au topos. C'est le premier exemple d'objets mathématiques qui affirme le primat de la topologie sur la logique. Le foncteur qui permet la construction induit une localisation qui est sous-jacente à la notion de fonctorialisation. Le recollement est la traduction technique du procédé qui de proche en proche étend des propriétés d'un topos à un autre plus grand. De ce fait, le topos peut être compris comme une généralisation de la notion d'espace topologique. La notion de catégorie de faisceaux laisse donc la place à la notion de topos en tant que généralisation d'espace topologique.

> « On peut donc dire que la notion de topos, dérivé naturel du *point de vue faisceautique* en topologie, constitue à son tour un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique, englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant de l'intuition topologique. Le trait caractéristique

[8]A. Grothendieck et J.L. Verdier, *Topos,* SGA 4, tome 1, Exposé IV, p. 314-315.

> de telles situations est qu'on y dispose d'une notion de "localisation", notion qui est formalisée précisément par la notion de site et, en dernière analyse, par celle de topos (via le topos associé au site). Comme le terme de "topos" lui-même est censé précisément le suggérer, il semble raisonnable et légitime aux auteurs du présent séminaire de considérer que l'objet de la topologie est l'étude des topos (et non des seuls espaces topologiques). »[9]

C'est donc un changement de perspectives que propose Grothendieck à travers la notion de topos. En passant de l'espace topologique au topos, on gagne en puissance et on ouvre des passerelles entre les domaines des mathématiques. C'est ce que Grothendieck appelle la *multiplicité schématique*[10]. Le topos est à la fois un élément de *confluence* comme rassemblement d'intuitions multiples dans une vision géométrique unique et un élément de *disfluence* comme élément décliné localement en un espace topologique. Tout passe par les recollements et les changements de base. Même et surtout dans les cas les plus difficiles.

> « Le yoga des catégories dérivées, pour exprimer l'homologie et la cohomologie des espaces topologiques, n'a d'ailleurs pas non plus pénétré parmi les topologues, pour qui la formule de Künneth (pour un anneau de coefficients qui n'est pas un corps) continue toujours à être un système de deux suites spectrales (ou à la rigueur, une kyrielle de suites exactes courtes), et non un isomorphisme canonique unique dans une catégorie convenable ; et qui continuent toujours à ignorer les théorèmes de changement de base (pour un morphisme propre ou par un morphisme lisse par exemple), lesquels (dans le cadre voisin de la cohomologie étale) ont constitué le tournant crucial pour le "démarrage" en force de cette cohomologie. »[11]

Sans entrer dans l'histoire et les détails de l'algèbre homologique[12] et le *yoga* des catégories dérivées, soulignons dès maintenant l'importance du changement de base dans la philosophie de Grothendieck, que nous verrons un peu plus loin dans ce chapitre, et dont l'expression formelle est le diagramme. Une suite spectrale ou plus simplement une suite exacte courte ou longue est un diagramme. A la fois au sens mathématique et au sens philosophique d'une figure munie d'une machinerie opératoire.

L'idée des suites exactes et des espaces d'homologie vient du problème matriciel suivant. Considérons deux applications linéaires $f : A \to B$ et $g : B \to C$ de matrices respectives $F$ et $G$ carrées d'ordre $n$. Supposons que ces deux matrices aient un produit nul $F \cdot G = 0$. Si $Y$ est un vecteur colonne de longueur $n$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ et si $G \cdot Y = 0$, on ne peut pas toujours écrire que $Y = F \cdot X$, pour un certain vecteur $X$. Ce défaut est mesuré par la dimension de l'espace d'homologie $H = \ker g / \operatorname{Im} f$ qui est le rapport des éléments du noyau de $g$, $\ker g = \{b \in B,\ g(b) = 0\}$ aux éléments de l'image de $f$, $\operatorname{Im} f = \{b \in B,\ \exists a \in A,\ f(a) = b\}$, et

[9] A. Grothendieck et J.L. Verdier, *Op. Cit.* p. 315.

[10] « Dans cette vision renouvelée, les espaces topologiques, différentiables etc... que le topologue manie quotidiennement sont, avec les schémas (dont il a entendu parlé) et les multiplicités topologiques, différentiables ou schématiques (dont personne ne parle) autant d'incarnations d'une même idée d'objets géométriques remarquables, les *topos annelés*, qui jouent le rôle des "espaces" en lesquels viennent confluer les intuitions de la topologie, de la géométrie algébrique et de l'arithmétique, en une vision géométrique commune. » A. Grothendieck, *Récoltes et semailles II,* p. 181.

[11] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles II,* p. 180.

[12] L'algèbre homologique inventée par Cartan et Eilenberg était surtout connue à travers l'ouvrage *Homological Algebra* publié en 1956. Cet ouvrage ne prend pas en compte les faisceaux qui peut avant sont l'œuvre de Jean Leray.

qui est donnée par la formule

$$\dim(H) = n - rg(F) - rg(G)$$

où $rg(F)$ est le rang de la matrice $F$. La suite

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

est une suite exacte si $\ker g = \operatorname{Im} f$. La représentation diagrammatique des suites résume l'ensemble de leurs propriétés. Les flèches indiquent le positionnement des structures mathématiques. Le résultat est bien connu pour les algèbres de Lie. Il montre que si $\mathfrak{h}$ est un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors l'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie et il existe une suite exacte d'homomorphismes d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow 0$$

qui est l'expression diagrammatique des relations structurelles entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Le même résultat est connu pour les groupes. L'analogue d'un idéal d'algèbre de Lie est un sous-groupe distingué. Le *lemme du serpent* englobe en un geste toute la puissance diagrammatique de l'algèbre homologique. Ce lemme pose que le diagramme commutatif de $R$-modules ($R$ est un anneau) suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & B' & \xrightarrow{i} & C' & & \end{array}$$

induit si les lignes sont des suites exactes, une suite exacte longue

$$\ker f \quad \to \quad \ker g \quad \to \quad \ker h \quad \xrightarrow{\partial} \quad co\ker f \quad \to \quad co\ker g \quad \to \quad co\ker h$$

qui est formée par un morphisme $\partial$

$$\begin{array}{ccccccc} & \ker f & \longrightarrow & \ker g & \longrightarrow & \ker h & \xrightarrow{\partial} \cdots \\ & \downarrow \cdots & & \downarrow \cdots & & \downarrow \cdots & \\ \cdots \xrightarrow{\partial} & \mathrm{coker} f & \longrightarrow & \mathrm{coker} g & \longrightarrow & \mathrm{coker} h & \end{array}$$

qui enchaîne en serpentant la fin de la première ligne au début de la dernière ligne. Le lemme affirme qu'il existe un foncteur de la catégorie des suites exactes courtes de $R$-complexes de chaînes (ou de cochaînes) vers la catégorie des suites exactes longues de $R$-modules. Pour toute suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

il existe des applications naturelles $\partial : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ qui enchaînent les espaces d'homologie

$$\cdots \xrightarrow{g} H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{f} H_n(B) \xrightarrow{g} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$$

en une suite exacte longue. Par dualité, le même résultat vaut pour une suite de complexes de cochaînes en remplaçant les espaces d'homologie par des espaces de cohomologies (et les indices par des exposants). En algèbre homologique, les diagrammes sont d'une effroyable simplicité. Très souvent cette simplicité cache une profonde complexité comme dans l'exemple de la suite spectrale traitée par Jean-Jacques Szczeciniarz[13].

[13] J.-J. Szczeciniarz, *Les catégories comme mode de réflexion des mathématiques sur elles-mêmes,* Conférence donnée au Colloque sur les catégories, ENS, Paris, 2005.

> « Comme autre exemple remarquable de topos qui ne sont pas des espaces ordinaires, et pour lesquels il ne semble pas avoir non plus de substitut satisfaisant en termes des notions “admises”, je signalerai : les topos quotients d'un espace topologique par une relation d'équivalence locale (par exemple des feuilletages de variétés, auquel cas le topos quotient est même une “multiplicité” i.e. est localement une variété) ; les topos “classifiants” pour à peu près n'importe quelle espèce de structure mathématique (tout au moins celles “s'exprimant en termes de limites projectives finies et de limites inductives quelconques”). Quand on prend une structure de “variété” (topologique, différentiable, analytique réelle ou complexe, de Nash, etc... ou même schématique lisse sur une base donnée) on trouve dans chaque cas un topos particulièrement alléchant, qui mérite le nom de “variété universelle” (de l'espèce envisagée). Ses invariants homotopiques (et notamment sa cohomologie, qui mérite le nom de “cohomologie classifiante” pour l'espèce de variété envisagée) devraient être étudiés et connus depuis longtemps, mais pour le moment ça n'en prend nullement le chemin... »[14]

A toute structure de variété est associée un ensemble d'invariants. Ces invariants dont certains comme l'invariant d'Euler-Poincaré sont connus depuis longtemps ont joué un rôle central dans le développement de l'algèbre homologique. Un polyèdre de l'espace tridimensionnel a trois éléments importants que sont ses sommets, ses arêtes et ses faces. Le genre topologique $\chi(M)$ d'une surface $M$ quelconque est caractérisé par un nombre entier qui est obtenu en additionnant le nombre de sommets ($S$) au nombre de faces ($F$) diminué du nombre d'arêtes ($A$).

$$\chi(M) = S - A + F$$

Le cube ($K$) a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut donc $\chi(K) = 8 - 12 + 6 = 2$. Imaginons que ce cube soit fait de caoutchouc. Comme il est déformable continûment en une sphère, cette sphère a la même caractéristique que le cube. Sur le tore ou sur d'autres variétés, on réalise en général un pavage ou une triangulation pour calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré.

La version duale de la relation d'Euler-Poincaré est une somme alternée qui porte sur les nombres de Betti, qui sont les dimensions de l'espace de cohomologie. Pour un espace tridimensionnel, cette relation décrit un résultat non plus entre les bords, mais un résultat entre les cobords, issu de l'opérateur de différentiation.

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2$$

Comme les courbes tracées sur une sphère sont homotopes à un point, le nombre de Betti du cube $b_1(K) = 0$ est nul. Et puisque les nombres de Betti d'ordre 0 et 2 valent 1 ($b_0 = b_2 = 1$), la caractéristique d'Euler-Poincaré se calcule simplement. Pour le cube, elle vaut $1 - 0 + 1 = 2$. Pour le tore, comme il y a deux classes de courbes selon les méridiens ou selon les plans transverses, le nombre de Betti vaut 2 ($b_1(T) = 2$). On retrouve la caractéristique d'Euler-Poincaré obtenue précédemment ($1 - 2 + 1 = 0$). Les nombres de Betti (pour le cube (1, 0, 1) et pour le tore (1, 2, 1)) sont donc des invariants dont la somme alternée est la caractéristique d'Euler-Poincaré ($\chi(M) = 2 - 2g$) qui d'un point de vue topologique représente le nombre de trous $g$ de la surface $M$ (Pour la sphère ou le cube $g = 0$, pour le tore $g = 1$). La formule d'Euler-Poincaré et sa version duale se généralisent à des dimensions quelconques. Emmy Noether en remplaçant les nombres de Betti par des groupes – par exemple, pour le tore $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z})$ au lieu de $(1, 2, 1)$ – donne de

[14] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles II,* note [46]6, p. 190.

nouveaux invariants que sont le rang et la torsion du groupe. Jean Leray, au lieu de découper la surface en sommets, arêtes et faces, élargit la catégorie des coefficients en remplaçant l'espace par la catégorie des faisceaux.

La notion de topoi ne concerne pas seulement la géométrie algébrique[15]. On la trouve aussi en théorie des modèles où la notion de topos classifiant joue un rôle essentiel. Grothendieck en introduisant la notion de topos classifiant dans les cas significatifs des théories dont il avait besoin, franchit une étape supplémentaire dans la quête de l'universalité des objets mathématiques. Si $T$ est une théorie mathématique, il s'agit de savoir s'il existe un modèle générique $M$ de cette théorie, ou ce qui revient au même, s'il existe un *topos classifiant*, c'est-à-dire un topos auquel est adjoint ce modèle. Si la théorie est donnée par des opérations, des relations et des axiomes, la question est de savoir si on peut caractériser le topos classifiant en ces termes : c'est la notion de *théorie cohérente*. On démontre que tout topos de Grothendieck (topos au sens des géomètres) est le topos classifiant d'une théorie définie par une esquisse. En utilisant la sémantique fonctorielle de Lawvere, Joyal et Reyes[16] ont démontré que toute théorie cohérente a un topos classifiant. Lawvere[17] a montré que les topoi classifiants des théories géométriques finies sont équivalents au théorème de complétude de Gödel-Henkin, et en cherchant le topos classifiant de la théorie des foncteurs plats, Diaconescu a donné un des théorèmes les plus profonds de la théorie des catégories et des topoi qui conduit à l'idée que dans tous les mondes possibles, i.e. dans tous les topoi, la logique est subordonnée au topos.

### Le théorème de Diaconescu

Le théorème de Diaconescu (démontré en 1975) affirme que si l'axiome du choix est vérifié dans un topos alors ce topos est booléen, autrement dit sa logique est classique. Comme l'axiome du choix a plusieurs formulations équivalentes, il s'ensuit qu'il existe plusieurs critères impliquant le principe du tiers exclu. La forme la plus simple de l'axiome du choix affirme que dans toute partie d'un ensemble non vide, on peut toujours choisir un élément. On démontre que cela est équivalent à mettre un ordre partiel sur cet ensemble. En 1940, Gödel a montré que l'axiome du choix est consistant avec les axiomes de la théorie des ensembles de von Neumann-Bernays-Gödel. En 1964, Cohen a démontré que l'axiome du choix est indépendant des axiomes de Zermelo-Fraenkel.

Lorsqu'on travaille dans un topos quelconque on ne connaît pas sa logique interne. On ne peut donc pas utiliser des preuves indirectes comme des démonstrations par l'absurde, ni utiliser l'axiome du choix. On doit suivre les règles de la logique intuitionniste[18] et ne pas utiliser le principe du tiers exclu. En général, les formules du type $\varphi \vee \neg\varphi$, $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ ne sont pas valables. Toutefois, le tiers exclu est applicable dans des cas particuliers comme l'identité d'un objet $A$. Pour deux variables $a$ et $b$ de type $A$, il est vrai que l'identité de $a$ et de $b$ exclut leur non identité :

$$\models (a = b) \vee \neg(a = b)$$

bien qu'en général on ne puisse pas affirmer que pour toute formule $\varphi$, on ait $\varphi \vee \neg\varphi$. C'est une singularité de l'ontologie de l'identité d'un objet que de vérifier le

[15] Les aspects logiques de la théorie des topoi sont exposés dans Robert Goldblatt, *Topoi, the categorical analysis of logic,* North Holland, deuxième édition, 1984.

[16] G.E. Reyes, "From sheaves to logic" in A. Daigneault, ed., *Studies in Algebraic Logic*, M.A.A. Studies in math., vol. 9, Math. Assoc. of America, p. 143-204.

[17] F.W. Lawvere, "Continuously variable sets : Algebraic geometry = Geometric logic", in H.E. Rose et J.C. Shepherdson eds., *Logic Colloquium 73,* North Holland, p. 135-156.

[18] Voir Jean Largeault éd., *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Vrin, 1992.

principe du tiers exclu. Si être et non-être ne s'exclut pas mutuellement, "être soi-même" et "ne pas être soi-même" s'exclut obligatoirement. Dans le cas des espaces topologiques, la frontière entre "être soi-même" et "ne pas être soi-même" n'a pas d'épaisseur. Si on définit la négation de $A$ comme l'intérieur du complémentaire de cet ouvert ($\neg A = (\overset{\circ}{A^c}) = \overline{A}^c$), il existe alors des cas où la négation de la négation de $A$ est différente de l'ensemble $A$.

$$\neg\neg A \neq A$$

car $\neg\neg A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ n'est pas toujours égal à $A$. Par exemple, sur la droite réelle, si $A$ est l'ensemble $A = \{0\} \cup ]1, 2]$ l'élément de frontière $\{0\}$ disparaît sous l'opérateur d'ouverture, l'information est perdue et cet élément ne peut plus être reconstitué puisque $\overline{A} = \{0\} \cup [1, 2]$ et $\overset{\circ}{\overline{A}} = ]1, 2[$. Dans ce cas, le non respect du principe de tiers exclu est dû à un problème de frontière. Cette singularité du bord est impliquée dans l'expression du virtuel et la dualité des mondes que nous avons déjà observé notamment à propos des surfaces de Riemann.

La formulation classique de l'axiome du choix dit que sur tout ensemble, il existe une fonction de choix. Une *fonction de choix* sur un ensemble $X$ est une application de $\mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\}$ sur $X$, qui à toute partie non vide associe un de ses éléments. Faire un choix, c'est être capable d'extraire une famille de singletons de toute famille d'ensembles non vides. Il est équivalent de dire que sur tout ensemble, il existe un *bon ordre* (ce qui est appelé le *principe du bon ordre*). Un ensemble est dit *bien ordonné* si chaque partie non vide admet un plus petit élément. Le *lemme de Zorn* dit que tout ensemble non vide partiellement ordonné dans lequel toute chaîne d'éléments deux à deux ordonnés a une borne supérieure admet un élément maximal. L'axiome du choix est équivalent à l'axiome des choix dépendants : si $R$ est une relation sur un ensemble non vide telle que pour tout $x$ il existe $y$ vérifiant $x\ R\ y$ alors il existe une suite $(x_n)$ telle que $x_n\ R\ x_{n+1}$ pour tout $n$.

Dans un topos, toutes ces formulations équivalentes de l'axiome du choix – choisir un plus petit élément ou ce qui revient au même ranger les éléments du topos selon un ordre préétabli (un ordre mathématique est une relation réflexive, antisymétrique et transitive) – imposent une logique classique. Donc valident le principe du tiers exclu. Mais il ne s'agit que d'une implication. On a équivalence dans le cas des topoi de faisceaux sur un treillis local, mais en général la réciproque est fausse. Une logique classique n'implique pas nécessairement l'axiome du choix. Cet axiome se formule aussi comme une propriété des ensembles infinis. Il équivaut à dire que tout ensemble infini est l'union de deux ensembles infinis disjoints. Autrement dit, on peut couper l'infini en deux parties elles-mêmes infinies. La somme des cardinaux de ces deux sous-parties est infinie. L'infini est un élément absorbant pour l'addition ($\infty + \infty = 2\infty = \infty$). Mieux : l'axiome du choix équivaut au postulat de Dedekind – tout ensemble infini a un sous-ensemble dénombrable. Avoir une fonction de choix, mettre un ordre, choisir un plus petit élément équivaut à avoir une structure dénombrable dans toute infinité, c'est-à-dire avoir un ensemble isomorphe à l'ensemble des entiers naturels. Par conséquent avoir une arithmétique dans toute infinité. Enfin, l'axiome du choix équivaut à l'axiome de constructibilité : tout ensemble est constructible.

L'axiome du choix caractérise donc la logique immanente d'un topos : classique ou intuitionniste. Ce qui est remarquable est que cet axiome a plusieurs formulations qui a priori ne semblent pas liées et qui ont des conséquences ontologiques importantes. Pour pouvoir ranger les objets d'un topos, il faut pouvoir les discerner de manière fine. La fonction de choix permet cette discernabilité. Si dans chaque partie de l'objet on peut discerner (c'est-à-dire choisir) un élément de cette partie, cela signifie que la texture de l'objet bien que pouvant être très complexe a une certaine atomicité qui permet ce choix. En répétant l'opération pour toutes les parties de l'objet, on définit une famille d'atomes qui peut être ordonnée. D'après ce que nous avons vu, on peut donc en déduire qu'il existe pour cet ordre un élément extrémal. Si maintenant nous considérons les éléments extrémaux de tous les objets du topos, cet ensemble a de nouveau un élément extrémal qui a une certaine universalité pour le topos. Cela contredit les positions des nominalistes[19], pour lesquels il n'y a pas d'entités universelles au delà des prédicats, et qu'il ne peut pas exister deux choses distinctes ayant les mêmes atomes. L'ontologie catégorielle admet la multiplicité de l'Être et des étants. Elle subordonne la logique au topologique qui la détermine complètement. Le tiers exclu suppose la discernabilité partielle des objets du monde qui découle de l'existence d'une fonction de choix. Lorsque l'axiome du choix est vérifié, il existe une granularité minimale des mondes possibles qui induit une logique nécessairement classique. L'étoffe ou la texture d'un topos répond à ces propriétés concernant l'intelligibilité de la différence qui entraîne des contraintes purement logiques.

Si le topos admet un objet infini (ce qui n'est pas le cas pour tous les topoi), la structure de ses sous-ensembles est déterminante pour la logique du topos. Il suffit que tout ensemble infini ait une partie infinie comptable, qu'il existe des éléments isomorphes à des nombres entiers naturels pour que la logique soit booléenne (i.e. classique). C'est encore un problème lié à la texture du topos et à l'atomicité de ses parties infinies. Si la granularité du monde permet de distinguer des unités de sorte qu'on puisse y dénombrer des éléments, alors le tiers exclu sera vérifié. Si l'axiome du choix est vrai alors toutes les parties infinies ont des structures d'un-multiple, dans le cas contraire il existe des multiplicités pures qui n'ont pas de sous-structures comptables. Le théorème de Diaconescu est donc un remarquable résultat d'ontologie, qui montre que la texture des topoi détermine la logique immanente des mondes.

### Le concept de point

La grande innovation de Grothendieck est de considérer que les ouverts sont plus importants que les points. Pour un espace topologique fait de points et d'ouverts, les ouverts donnent plus d'informations que les points. Comme une topologie se définit aussi par les voisinages d'un point, on comprend que le système des voisinages d'un point est plus important que le point lui-même. Si l'espace est un espace abstrait, disons un espace fait d'individus, ce qui importe n'est pas l'individu lui-même, mais le voisinage de chaque individu, l'assemblée d'hommes qui se trouve au voisinage d'un homme donné. La notion de voisinage est évidemment fonction de la topologie choisie. Pour construire une topologie associée à des structures uniformes, il suffit de définir ce que sont deux individus voisins. Par exemple en retenant des considérations physiques comme deux hommes sont voisins s'ils ont deux yeux opérationnels, on est conduit à un partage en deux classes (les voyants et les non-voyants). Le voisinage se définit aussi par d'autres critères : deux hommes sont voisins s'ils pensent tous deux que la proposition $A$ est vraie. La notion de topologie impose un raisonnement plus large que le raisonnement sur des cas isolés. Elle force à considérer des ensembles plus vastes sur lesquels il y a une notion de proximité. C'est cette proximité qui définit la continuité et devient l'élément moteur en introduisant une sociabilité des ensembles ou des collections.

[19]N. Goodman, "A World of Individuals", in *The Problem of Universals, a symposium with I.M. Bochenski, N. Goodman, and A. Church,* University of Notre-Dame Press, p. 15-31.

L'existence des points n'est pas un problème contemporain. Dans les traités du Moyen Age, elle est liée à l'indivisibilité du point. Pour Nicolas Oresme[20], le point est une entité physique qui n'est ni une substance, ni un accident, mais un *complexe significabilia*[21], une chose signifiable de façon complexe. Pour démontrer son existence, il faut isoler le point du continu dont la divisibilité pose problème. Il semble que toute partie d'un continu soit toujours divisible. Par conséquent, les indivisibles (le *hic indivisibiliter*) comme les points n'existent pas. Or le point est une entité physique dont l'existence semble évidente. Ainsi la caractérisation de l'être des points devient un difficile problème d'ontologie. Il semble que les points existent, mais personne ne peut démontrer leur existence. Bien plus : leur existence met en cause l'incommensurabilité de la diagonale du carré, pourtant acceptée par Roger Bacon et Duns Scot. Le point est un *complexe significabilia*, qui ne s'apparente pas à la substance, mais qui a pourtant un certain degré d'être. Les points ne sont pas non plus des accidents qu'Oresme réduit à des modes d'être (*modi rerum*) que nous assimilons parfois aux états de choses et qui seraient un cas particulier des choses signifiables de façon complexe. Pour le nominaliste Jean Buridan, les points existent et sont des entités divisibles[22]. On lui oppose la démonstration suivante. Tout segment de droite est terminé par deux extrémités qui sont des points. Si nous construisons un carré et si nous traçons les lignes parallèles qui joignent les points des côtés opposés du carré, chaque ligne coupe la diagonale en un point unique. Il y a donc autant de points dans le côté du carré que dans la diagonale. Si le point existe et si le point est mesurable, la somme des mesures des points de la diagonale est égale à la somme des mesures des points du côté du carré. Le côté a donc même longueur que la diagonale. Or nous savons que cela est faux. Donc le point n'existe pas.

Dans les sciences physico-mathématiques contemporaines, l'*ironie du point* a pris une nouvelle dimension. Dans un espace topologique $(X, T)$, on a deux notions de points : les éléments de l'ensemble $X$ lui-même et les points du treillis des ouverts $T$. Lorsque l'espace est propre, les deux notions coïncident (i.e. sont isomorphes). Le treillis des ouverts est ce qu'on appelle un *treillis local*. Un treillis local est une structure simple qui satisfait quelques axiomes dont l'existence d'un élément terminal. Les points du treillis local sont définis comme des morphismes de l'élément terminal vers ce treillis. Ils forment un ensemble que l'on appelle le *spectre* de ce treillis. L'importance d'un treillis local vient du fait qu'un des principaux objets étudiés dans le séminaire de Grothendieck, à savoir les morphismes étales sont équivalents aux faisceaux au-dessus du treillis local. Comme le faisceau sur un treillis local est constitué d'éléments définis à différents niveaux de ce treillis, l'étude des morphismes étales revient donc à l'étude des différentes strates du treillis local. Ces espaces striés ouvrent des perspectives d'étude qui sont complétés par les procédés de recollements. La vérité d'un lieu est équivalente à la vérité de ses strates. Si $(X, T)$ est un espace topologique propre, les éléments de l'ensemble $X$ s'identifient avec les points du treillis local $T$. Ces points sont eux-mêmes des morphismes géométriques $p : \mathit{Ens} \rightarrow \mathit{Sh}(X, T)$ du topos des ensembles (c'est-à-dire des faisceaux sur un singleton) vers le topos des faisceaux sur $(X, T)$. Dans un topos de Grothendieck, un point est simplement un morphisme géométrique du topos des ensembles vers le topos de Grothendieck. Sur un espace topologique $X$, se donner un point est donc équivalent à se donner une application continue d'un singleton vers $X$. Un point d'un treillis local $\mathcal{L}$ est un morphisme $p : \{0, 1\} \rightarrow \mathcal{L}$ de l'objet terminal du treillis

[20]D'après Jean Celeyrette il existe un exemplaire des *Questions sur la physique* de Nicolas Oresme à Séville, Bibli. Colomb. 7.6.30.

[21]Sur cette question, voir Hubert Elie, *Le signifiable par complexe,* Vrin 1936, rééd. 2000.

[22]J. Buridan, *Physique*, Question VI-4.

local $\{0, 1\}$ vers $\mathcal{L}$. La catégorie des faisceaux sur un treillis local est équivalente à la catégorie des $\mathcal{L}$-ensembles[23].

Ce que Badiou appelle un *transcendantal* est exactement un treillis local, c'est-à-dire une algèbre de Heyting complète[24]. Les points d'un transcendantal sont selon Badiou « la dramatisation binaire des nuances de l'apparaître »[25], que nous comprenons comme les valeurs binaires d'une fonction de l'étant. Plus précisément,

> « Un point du monde (en réalité, du transcendantal d'un monde) est ce qui fait comparaître l'infinité des nuances d'un monde, la variété des degrés d'intensité de l'apparaître, le réseau ramifié des identités et des différences, devant l'instance du Deux qu'est "oui"ou "non", l'affirmation et la négation, l'abandon ou le refus, l'engagement ou l'indifférence[26]... Formellement : étant donné un transcendantal $T$, on appelle "point" du transcendantal une fonction de $T$ vers l'ensemble $\{0,\ 1\}$. »[27]

En définissant un point comme une fonction de valuation, Badiou replie le concept de point sur une logique binaire à deux états (vrai ou faux) et contraint le transcendantal à une logique classique. Pourquoi ne pas conserver toutes les nuances de l'apparaître, autrement dit toutes les valeurs du treillis local ? Alors que la définition mathématique définit le point comme un morphisme de l'objet terminal vers toutes les valeurs du treillis local $p : \{0, 1\} \to \mathcal{L}$ , Badiou inverse la définition $p : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$ du point comme morphisme allant du treillis local vers l'objet terminal. De ce fait, la notion de point perd de son intérêt. Toutes les valeurs intermédiaires entre le vrai et le faux disparaissent dans cette nouvelle définition : il ne reste plus que deux valeurs vrai ou faux. La stratification des espaces disparaît également. Un faisceau sur un treillis local est constitué d'éléments définis à différents niveaux. En observant les éléments des niveaux inférieurs, on peut par recollement définir de nouveaux éléments. On démontre que les points d'un treillis local sont équivalents aux éléments premiers de ce treillis qui sont en quelque sorte les points les plus hauts d'un niveau donné. Le spectre d'un treillis local est l'ensemble de ses points. La projection des éléments du treillis local sur la catégorie du Deux $2 = \{0,\ 1\}$ est une réduction de la valeur des éléments du treillis local à deux états. Le morphisme de Badiou ne définit pas un point, mais une valuation des éléments de la locale. C'est une réduction des mondes à une simple binarité. Il décide de la valeur vrai ou faux des éléments du transcendantal d'un monde. « Un point du monde est une relation générale entre les intensités objectives de ce monde et une instance du Deux, relation telle qu'elle conserve les opérations constitutives de la logique de l'apparaître (conjonction, enveloppe, etc.) »[28]

Dans un transcendantal, il y a donc selon Badiou des *points vrais*, c'est-à-dire des éléments du treillis local qui se projette sur 1 et des *points faux* qui se projettent sur 0. Autrement dit, deux possiblités par point. Badiou affirme que de ces deux possibilités une seule est la "bonne"[29]. Tout objet du transcendantal est donc décidable, ce qui contredit le théorème de Cohen. Dans la théorie badiolienne, le point devient le lieu d'apparition des vérités. Plus encore : il devient ce que certains appelent un porteur de vérité ou un vérifacteur (*truth-bearer*). Il est même

[23] Jean Bénabou a montré que la construction de faisceaux quotient qui ne va de soi dans la catégorie des faisceaux devient triviale dans la catégorie de ce qu'il appelle les *ensembles empiriques*.

[24] A. Badiou, *Logiques des mondes*, p. 563.

[25] *Ibid.*, p. 459.

[26] *Ibid.*, p. 421.

[27] *Ibid.*, p. 612-613.

[28] *Ibid.*, p. 429.

[29] *Ibid.*, p. 439.

le lieu de réalisation des aléas « Il y a “point” quand par une opération qui implique un sujet et un corps, la totalité du monde est l'enjeu d'un pile ou face. »[30] Il est difficile de suivre Badiou sur ce chemin où seuls les points justifieraient les connaissances acquises et seraient même la focalisation de décisions aléatoires.

## Les objets virtuels

Le point est comme tous les objets un composé d'actuel et de virtuel. C'est, nous l'avons vu, une conséquence du lemme de Yoneda. Derrière la figure diagrammatique du point se tisse un réseau de morphismes qui forme sa composante virtuelle. Le virtuel concentre les singularités des points par lesquels les domaines transdisciplinaires se rejoignent et où transitent les acquisitions de connaissances. Cependant il ne faut pas croire qu'il y ait une dichotomie entre des points actuels et des points virtuels, comme il y aurait selon Badiou des points vrais et des points faux, car il n'y a que des composés multiples qui ont une certaine atomicité qui émergent de l'objet terminal de la catégorie. C'est le sens de la définition mathématique du point.

En cohomologie étale, Grothendieck introduit quatre opérations qui sont quatre foncteurs (notés $Rf^*$, $Rf_*$, $Rf^!$ et $Rf_!$) associés à tout morphisme de schémas $f : X \to Y$. Pour un anneau commutatif fini $A$, ces quatre foncteurs relient les catégories dérivées des faisceaux étales de $A$-modules $D(X, A)$ et $D(Y, A)$. La construction de ces opérations dans des catégories homotopiques sont à la base des travaux sur les *motifs* qui ont été développés par Youri Manin et Vladimir Voevodsky. Pour Grothendieck, le formalisme des six opérations (dont vous venons d'en citer quatre) se construit à partir d'objets virtuels.

> « Le yoga des motifs est né d'ailleurs justement, en tout premier lieu, de ce “yoga des poids” que je tenais de Serre. C'est lui qui m'avait fait comprendre tout le charme des “conjectures de Weil” (devenue “théorème de Deligne”). Il m'avait expliqué comment (modulo une hypothèse de résolution des singularités dans la caractéristique envisagée) on pouvait, grâce au yoga des poids, associer à chaque variété algébrique (pas nécessairement lisse ni propre) sur un corps quelconque des “nombres de Betti virtuels” – chose qui m'avait alors beaucoup frappée. C'est cette idée je crois qui a été le point de départ pour ma réflexion sur les poids, qui s'est poursuivie (en marge de mes tâches de rédaction des fondements) tout au long des années suivantes. (C'est elle aussi que j'ai reprise dans les années 70, avec la notion de “motif virtuel” sur un schéma de base quelconque, en vue d'établir un formalisme des “six opérations” tout au moins pour les motifs virtuels.) »[31]

Dans l'établissement des six opérations, Grothendieck joue de la dualité du couple virtuel-actuel en associant à des objets mathématiques connus un double virtuel. Ce double rejoint son Être actuel par les foncteurs des six opérations qui déterminent le sens de la relation catégorielle. L'inverse est la relation duale. Dans ce cas, le mathématicien note en indice ou en exposant les couples actuel-virtuel. Cette dualité et le sens des foncteurs catégoriels est pour Grothendieck l'élément qui permet de distinguer des nombres de Betti actuels des nombres de Betti virtuels. Badiou conteste cette distinction du virtuel et de l'actuel. Pour lui, le virtuel ne peut pas exister, car s'il existait il réintroduirait nécessairement l'équivocité de l'Être selon deux composantes minimales d'un Être actuel et d'un Être virtuel

[30] *Ibid.*, p. 422.

[31] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles II,* p. 185-186.

distinct de l'Être actuel. Et cela contredirait l'univocité démontrée de l'Être. Par conséquent, le couple virtuel-actuel se dilue nécessairement dans l'indiscernable, puisque si l'Être actuel ne peut se différencier de l'Être virtuel, c'est que les deux sont confondus ou qu'il revient au même de les confondre.

Prenons de nouveau l'exemple des nombres. Dans le voisinage de mon univers, les nombres semblent parfaitement définis : zéro, un, deux, trois, cinquante cinq sont des nombres actuels (notés $a$) dont le côté virtuel vient de ce qu'ils sont aussi des singularités $1/(x-a)$. Au delà de mon horizon, l'existence des nombres paraît plus floue, plus imprécise. Il suffit pourtant de pointer un nombre même très grand pour qu'il s'actualise $3+10^{542}$ et prenne une réalité que n'ont pas les nombres qui sont dans son voisinage. Le virtuel replie l'infinité dans l'ensemble des nombres naturels. Le constructivisme assure leur existence actuelle ou virtuelle qui se fonde sur les axiomes de Peano. Les nombres relatifs se construisent en adjoignant un signe à chaque nombre et les nombres rationnels sont issus de considérations fractionnaires du type $p/q$. Les nombres irrationnels ont quant eux une existence qui n'est pas explicite. Ils se construisent à partir de limites de suites de nombres. Le nombre $\pi$ est par exemple la limite d'une suite de Cauchy ou la limite des convergentes de son développement en fractions continues : 22/7, 333/106, 355/113, 103993/331002, etc. Si ce nombre est connu parce qu'il représente la surface d'un cercle de rayon unité, de la même manière que le nombre $\sqrt{2}$ est connu parce qu'il représente la longueur de la diagonale du carré de côté unité, il n'en reste pas moins qu'il existe une infinité de nombres irrationnels qui n'ont pas reçu de symbole pour les désigner et qui sont des nombres virtuels en ce sens qu'ils représentent *une réalité en acte inaccomplie et tendant à l'accomplissement.* C'est le sens que Leibniz donnait au virtuel dont le nom repose sur la force (*vis*) qui accomplit le devenir du nombre et témoigne de l'activité souterraine de ces nombres. Mieux encore : les nombres irrationnels non algébriques (qui ne sont pas solutions d'équations algébriques) ont une singularité accrue qui leur confère une pleine existence qui n'est pas du côté du possible, mais de la vie, de sa croissance et de son développement. Ces nombres sont en quelque sorte le sous-sol de l'arithmétique, la figure à la fois embryonnaire et pleine d'actualité de la dynamique et de la vitalité des nombres.

Le couple actuel-virtuel ne se dissout donc pas dans l'indiscernable. Le virtuel est distinct du possible et possède une pleine réalité. Mais son expression n'est pas toujours correctement perçue, car le virtuel est fait de rapports différentiels et de singularités. Il est « actualisation de rapports différentiels, incarnation de points singuliers »[32] Deleuze relève chez Descartes le principe de représentation ou principe de la proportionnalité du clair et du distinct : « une idée est d'autant plus distincte qu'elle est plus claire ». (p. 275) et lui associe la remarque de Leibniz qu'une idée claire est par elle-même confuse. En logique cartésienne, cela signifie qu'une idée claire est confuse dans la mesure où elle n'est pas encore suffisamment claire dans toutes ses parties. Mais remarque Deleuze, on peut le lire non plus en termes de parties-tout, mais en termes de virtuel-actuel. Il reprend de Leibniz l'exemple du bruit de la mer. L'aperception du bruit des vagues est claire mais confuse parce qu'elle est faite de petites perceptions dont toutes ne sont pas claires (logique cartésienne) ou bien (expression du virtuel) « que les petites perceptions sont à la fois distinctes et obscures (non claires) : distinctes parce que saisissant des rapports différentiels et des singularités, obscures par que non encore "distinguées", non encore différenciées » (p. 276). On peut caractériser le virtuel en reprenant l'exemple des nombres non algébriques, qui poussent sous l'actuel pour modeler et affirmer l'existence de la droite réelle, du continuum des nombres. Partant de la valeur cartésienne de l'Idée platonicienne, le « clair et le distinct »,

[32]G. Deleuze, *Différence et répétition*, p. 276.

Deleuze croise le clair-obscur avec les remarques de Leibniz, pour reconstruire une approche singulière du virtuel. Il pose le *distinct-obscur* comme élément consistant du virtuel et le *clair-confus* comme élément consistant de l'actuel. Il démontre que l'immanence de l'Être n'est pas incompatible avec l'existence du virtuel et que l'immanence équivaut à l'univocité de l'Être. Le virtuel ne se donne à voir que dans la mesure où il s'actualise dans le réel. « Son processus est l'*actualisation.* » Il se distingue du possible qui s'oppose au réel et dont le processus est la *réalisation.* « Le virtuel, au contraire, est le caractère de l'Idée ; c'est à partir de sa réalité que l'existence est produite, et produite conformément à un temps et un espace immanents à l'Idée. »[33] Telle est la leçon des nombres.

### Diagrammes et changement de base

Chez Grothendieck, la notion de diagramme est profondément liée à la notion de changement de base. L'idée est de transférer des données ou des propriétés d'un objet mathématique à un autre. De ce fait, le changement de base est lié à la fonctorialité des morphismes qui réalisent le transfert entre catégories et à la localisation des données. Par exemple, si $S$ est un préschéma et $I$ un idéal nilpotent cohérent sur $S$, alors les données au-dessus du sous-schéma $S_0$ fermé de $S$ défini par l'idéal $I^{n+1}$, $n \geq 0$, seront transférées vers des données qui les relèvent au-dessus de $S$, c'est-à-dire qui les redonnent par changement de base. Le moteur diagrammatique s'élabore par construction pas à pas des idéaux $I^{n+1}$. Il y a donc une chaîne implicite de sous-schémas $S_n$ qui conduit le relèvement des données.

D'un point de vue catégoriel, le changement de base est plus un changement de point de vue qu'un transfert de données. Le caractère *fonctoriel* traduit le changement de base, c'est-à-dire en termes non mathématiques le changement de point de vue. C'est la caractéristique principale des foncteurs de transporter des situations d'une catégorie ou d'un topos vers une autre catégorie ou un autre topos, vers une autre ligne d'horizon. Le diagramme de changement de base révèle ce caractère fonctoriel, qui est autant un changement de point de vue, qu'un transport de structures. On comprend la nature locale de ce foncteur changement de base, puisqu'il s'agit de passer d'un point de vue à un autre. Le passage au global n'est autre que la preuve qu'une propriété reste valable pour tous les points de vue. Ce qui revient à valider la propriété pour l'objet dans son entière totalité. La fonctorialité est par conséquent intimement liée à la localisation ou en d'autres termes à la dialectique de territorialisation – déterritorialisation.

Dans l'étude des schémas des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif[34], le diagramme (fig. 35) résume la situation entre foncteurs autant qu'il conduit la démonstration. Les propriétés découlent de la commutativité d'un cube tronqué. Tous les morphismes du diagramme sont lisses, surjectifs, et de présentation finie. Un seul morphisme $t$ n'est pas affine. Cette singularité qui est liée à la troncature du cube, impose un fonctionnement particulier du diagramme et constitue la richesse de son moteur opératoire. Le diagramme est l'expression formelle du changement de base.

Sous certaines conditions, le changement de base a la propriété remarquable d'être bijectif. C'est le cas par exemple lorsque le morphisme de changement de base est lisse. Il peut alors induire l'équivalence de catégories, c'est-à-dire conserver à la fois les différences dans chacune des catégories et impliquer l'ensemble des objets, car la bijectivité se compose de deux faces : l'injectivité et la surjectivité.

[33] *Ibid.*, p. 273.

[34] M. Demazure, *Sous-groupes paraboliques des groupes réductifs*, SGA 3-3, p. 456.

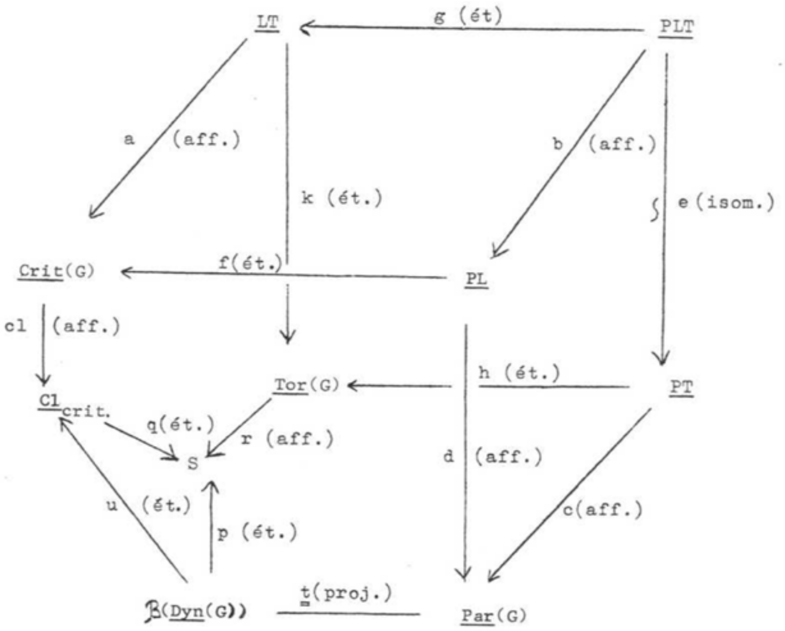



FIG. 35. Diagramme et changement de base, in SGA 3-3, p. 456

L'injectivité assure que les différences sont conservées par le changement de base, et la surjectivité assure que tous les éléments ont un antécédent, autrement dit que tous les objets susceptibles d'être concernés par le foncteur sont impliqués dans le changement de point de vue. Il n'y a pas d'objet qui échapperait à ce point de vue. Plus encore : le changement de base induit des notions *universelles* lorsqu'une propriété est conservée par tout changement de base. Si quel que soit le point de vue, la propriété n'évolue pas, elle définit des invariants. Le plus souvent, l'unique de ces invariants traduit l'universalité des objets, car l'universel est le rapport de l'objet à l'Un.

Avec la notion d'*univers*, Grothendieck évite les contradictions liées à l'ensemble de tous les ensembles. Un univers est un ensemble "assez gros" dans lequel toutes les propriétés ensemblistes classiques s'appliquent de sorte qu'on ne sorte jamais de l'univers. Les limites de mon monde sont les limites de mon univers, non les limites de mon langage. La catégorie *Ens* est la catégorie non pas de tous les ensembles, mais la catégorie de tous les ensembles qui se trouvent dans un univers donné $\mathcal{U}$. *Cat* est la catégorie des catégories qui se trouvent dans cet univers. Si $\mathcal{E}$ est une catégorie de $\mathcal{U}$, la catégorie $Cat/\mathcal{E}$ désigne la catégorie des objets de $Cat$ au-dessus de $\mathcal{E}$. Un objet de cette catégorie est un foncteur d'une catégorie $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{E}$. Pour un foncteur $\lambda$ d'une catégorie $\mathcal{E}'$ dans une catégorie $\mathcal{E}$, $\lambda : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ et pour toute catégorie $\mathcal{F}$ au-dessus de $\mathcal{E}$, Grothendieck[35] considère la catégorie du produit fibré $\mathcal{F} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}'$ comme une catégorie au-dessus de $\mathcal{E}'$. L'opération "produit fibré" est considérée comme une opération de "changement de base" et le *foncteur de changement de base* pour $\lambda$ associe à tout morphisme de catégories un morphisme entre produits fibrés

$$\overset{*}{\lambda}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}/-}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}'/-}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$$

[35]A. Grothendieck, *Catégories fibrées et descente*, SGA 1, p. 145.

Si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont trois catégories au-dessus de $\mathcal{E}$, et si on note les produits fibrés par les expressions

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\times_{\mathcal{E}}\mathcal{E}' \; \mathcal{G}' = \mathcal{G}\times_{\mathcal{E}}\mathcal{E}' \text{ et } \mathcal{H}' = \mathcal{H}\times_{\mathcal{E}}\mathcal{E}'$$

la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/-}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/-}(\mathcal{G},\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/-}(\mathcal{G},\mathcal{H}) \\
\lambda^*_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\times\lambda^*_{\mathcal{G},\mathcal{H}} \downarrow & & \downarrow \lambda^*_{\mathcal{F},\mathcal{H}} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'/-}(\mathcal{F}',\mathcal{G}') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'/-}(\mathcal{G}',\mathcal{H}') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}'/-}(\mathcal{F}',\mathcal{H}')
\end{array}$$

exprime la fonctorialité du changement de base

$$(gf)' = g'f'$$

pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. A travers les diagrammes, l'orientation constructive suppose que soit pris en considération l'étendue des possibilités, non pas dans une globalisation des problèmes, mais sur des situations simples qui font intervenir des diagrammes élémentaires dans un réseau de constructions réalisées localement. L'intérêt est de pouvoir considérer des situations locales élémentaires, car la localisation et l'élémentarité conduisent à des théorèmes globaux débarrassés d'hypothèses superflues. La démarche est alors d'établir des résultats localement, puis de les étendre au domaine global en jouant de la dialectique du local et du global. Le cadre de cette localisation consiste en la création d'objets spécifiques adaptés à cette intens(t)ion locale, qui nous offre par sommation sur le virtuel des résultats d'extension globale. L'exemple des produits fibrés est un cas particulier de ces changements de base.

Dans le séminaire de géométrie algébrique, le passage du local au global s'effectue par la *méthode de la descente*[36]. Il s'agit d'un procédé par lequel les objets sont recollés. On passe ainsi d'une propriété locale à une propriété globale. Le cas le plus intéressant est le recollement de catégories. Le cas classique est celui d'un espace topologique recouvert par ses ouverts[37]. La notion de recollement est liée à l'étude des changements de base. On comprend alors pourquoi la localisation et les recollements de catégories sont associés au caractère fonctoriel. Le passage du local au global par des suites spectrales est une des nombreuses innovations du séminaire de Grothendieck[38]. Des résultats locaux induisent des résultats globaux et permettent de passer au global, souvent en se dispensant de certaines hypothèses de non singularités et d'avoir ainsi des résultats plus généraux. En ce sens, la dialectique du passage du local au global et du global au local est une contribution vers des résultats plus généraux, une ouverture sur l'universel.

### Le langage interne des topoi

Avec le programme de Russell et le développement de la philosophie du langage, les frontières entre grammaire et philosophie ont souvent été floues, parfois abolies, donnant naissance à une certaine confusion entre les domaines respectifs de chaque science. Si la philosophie ne s'occupe que du langage, en quoi se distingue-t-elle de la linguistique ? Si tous les efforts ne se concentrent plus que sur la copule du verbe être et de ses mécanismes langagiers, la science de l'Être en tant qu'Être relève alors de

[36]Soit $K \subset L$ une extension de corps. Si $X$ est un espace vectoriel sur $K$ alors $X^L = X \otimes_K L$ est un espace vectoriel sur $L$. Lorsqu'une propriété de $X^L$ se transporte sur $X$, on parle de propriété induite par descente.

[37]*Ibid.*, p. 162

[38]Voir par exemple, SGA 2, Exposé I, *Les invariants cohomologiques globaux et locaux relatifs à un sous-espace fermé.*

la science du langage et des théories du discours. Russell le premier ne voit entre le monde et la langue qu'une identité de structure. Les catégories logiques de la langue sont en corrélation avec les éléments du monde non linguistique. A l'enchaînement des parties du discours répond des chaînes de prédicats. Les *principia* fournissent le premier exemple de constitution d'une langue logique.

La théorie des types combine à la fois une syntaxe logique et une théorie du sens. Avec le développement des grammaires et l'évolution des entités linguistiques, la philosophie a délaissé la grammaticalité pour les parties du discours. Le partage entre syntaxe et sémantique s'est déplacé. Déjà chez Carnap, la constitution d'une théorie des catégories de langue repose entièrement sur les aspects syntaxiques au détriment de considérations sémantiques. Avec la théorie des actants et la philosophie de Searle, la vérité ne se concentre plus que sur les actes du discours. Dans tous les cas, le fonctionnement de la langue repose sur des logiques classique, modale, temporelle ou autres. L'ontologie est irrémédiablement liée à un langage.

Selon Dummett, la métaphysique a été tour à tour, d'abord, ontologique dans l'antiquité, puis épistémologique à l'âge classique et enfin sémantique à l'époque contemporaine. En conservant un même but, la question s'est déplacée de *qu'est-ce que l'Être ?* à *qu'est-ce que signifier ?* D'un problème d'existence, on est passé à un problème de signification. Il ne s'agit plus de savoir si les nombres existent, mais qu'est-ce que cela signifie que les nombres existent. Déjà, Carnap distinguait des questions internes et des questions externes. S'il y a un sens à se demander s'il existe des nombres premiers, parce que la question se pose dans un domaine interne délimité des mathématiques, il n'y en a pas à se demander si les nombres existent, car la question porte sur l'extériorité de la théorie et suppose l'adoption d'un certain langage. Le partage entre l'interne et l'externe est donc lié au fait que l'on se place avant ou après l'adoption d'un tel langage. Pour un constructiviste, les nombres existent parce qu'il existe un processus qui permet de les construire, en l'occurence la fonction successeur des axiomes de Peano. Dans le cas du constructivisme, Être c'est être le résultat d'un algorithme inductif. Généralisé à l'ensemble des mondes possibles, cela signifie que tout objet est atteignable par un algorithme, qu'il est, en quelque sorte *calculable*. Ce qui est inconcevable pour les objets d'une catégorie, car dans une catégorie, on ne peut parler d'éléments et encore moins les compter. La réponse de Quine : *Être, c'est être la valeur d'une variable* pose la question de l'Être comme une valuation de variables propositionnelles et de prédicats. De ce fait, elle relie de manière indissociable logique, ontologie et sémantique.

La valuation n'est qu'une des composantes des modèles de Kripke, qui sont des cas particuliers des modèles qui interviennent en théorie des topoi. Un *modèle de Kripke* est un quadruplet $K = (S, R, D, W)$ qui décrit un ensemble de mondes $S$ munis d'une relation binaire $R$ induite par la logique des mondes[39], une application $D$ qui associe à chaque monde un domaine et une valuation $W$ qui détermine les valeurs de vérité et qui est définie pour chaque type (constante, variable individuelle, variables propositionnelle, prédicat et symbole de fonctions). Lorsqu'on considère des modèles dans des topoi de faisceaux, ces modèles déterminent la *sémantique de Joyal-Kripke*. Avec ces définitions, la sémantique est donc placée sous la dépendance de la logique du modèle. Mais le mathématicien a en général le choix du modèle. Lorsqu'il s'agit de topoi, la logique est complètement déterminée par les topoi.

A chaque topos est naturellement associé un langage interne. Ce langage permet d'attribuer une valeur de vérité aux assertions portant sur les objets propres du

[39]Par exemple : $R$ est un ordre partiel pour la logique intuitionniste, une relation de préordre pour la logique modale $S_4$, une relation d'équivalence pour $S_5$. Sur les logiques modales, voir G.E. Hugues, M.J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, 1968. J. Van Benthem, *Modal Logic and Classical Logic*, Bibliopolis, 1983.

topos. Lorsque le topos est muni d'une théorie locale des ensembles, le langage est décrit par la sémantique de Joyal qui établit une correspondance par la *relation de forcing*[40] entre les formules et les ensembles. Si $X$ est un ensemble et $\varphi$ une formule, on relie ces deux entités par la relation de forcing : $X$ force $\varphi$ (notée $X \Vdash \varphi$). Plus précisément, le forcing est défini de la façon suivante. Soit $M$ un modèle de la théorie des ensembles. Si $G$ est un filtre générique représentant un ensemble de conditions et $\mathcal{N}$ la sous-classe des noms dans $M$, on note $M[G] = \{val(u, G), u \in \mathcal{N}\}$ l'ensemble des valuations des noms. On dit que la condition $p \in G$ force la formule $\varphi(u_1, ..., u_n)$ si l'ensemble de toutes les valuations des noms est donné par $M[G] = \varphi(val(u_1, G), ...., val(u_n, G))$.

$$M[G] \models \varphi \iff \exists p \in G,\ p \Vdash \varphi$$

Toutes les propriétés de $M[G]$ sont des propriétés de $M$. Le forcing revient à réduire l'étude de la théorie des ensembles de $M[G]$ à celle de $M$. Les règles de la sémantique de Joyal établissent une corrélation entre des relations ensemblistes et des assertions logiques. Par exemple la règle : l'ensemble $X$ force $P$ ou $Q$ ($X \Vdash P \vee Q$) si $X$ est recouvert par deux ensembles $U$ et $V$ tels que $U$ force $P$ et $V$ force $Q$

$$X \Vdash P \vee Q \iff \exists\ U, V,\ X = U \cup V, U \Vdash P, V \Vdash Q$$

joint une réunion d'ensembles et les deux pans d'une proposition logique. Il y a plusieurs façons de décrire le langage associé à un topos. Dans le *langage de Mitchell-Bénabou*, la topologie est liée aux assertions logiques par la relation de forcing. Les règles définissent la sémantique par induction sur la complexité des formules. On dit que l'ouvert $U$ force "$P \Longrightarrow Q$" si pour tout ouvert $V$ de $U$ tel que $V$ force $P$, on a aussi $V$ force $Q$. $U$ force la proposition "pour tout $x$, $P(x)$" si pour tout ouvert $V$ de $U$ et toute section $s$, $V$ force $P(s)$. $U$ force la proposition "il existe $x$ tel que $P(x)$" s'il existe un recouvrement de $U$ par des ouverts $U_i$ et des sections $s_i$ sur chaque $U_i$ tels que pour chaque indice $i$, $U_i$ force $P(s_i)$. Cet exemple montre comment la sémantique se construit de proche en proche sur des formules logiques et le lien étroit qui relie topologie et logique. On comprend que la logique est subordonnée par la relation de forcing au topologique.

Ne pas accepter le principe du tiers-exclu, ce n'est pas comme Quine le croyait, changer de sujet, mais bien se conformer aux lois du topos dans lequel on évolue. On ne peut y échapper : a priori, la logique du topos est intuitionniste, sauf dans quelques cas où comme nous l'avons vu lorsque l'axiome du choix est vérifié la logique est classique. C'est une propriété imposée de l'extérieur par le langage interne du topos. En désignant les catégories comme des concepts formels, Wittgenstein plaçait l'ontologie sous la dépendance de la logique. Mais comme la logique est elle-même sous la dépendance des topoi, l'ontologie est par conséquent subordonnée au topologique.

## Diagrammes et fonctions de Belyi

Le théorème de Belyi[41] est un des résultats les plus surprenants de la géométrie algébrique. Il avait été remarqué par A. Grothendieck[42] qui relia les fonctions de

[40] Le *forcing* est une technique mathématique inventée par Paul Cohen qui l'utilisa pour la première fois en 1962 pour démontrer que l'axiome du choix et l'hypothèse du continu sont indépendants de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Il consiste à étendre un modèle $M$ de la théorie des ensembles en un modèle $M[G]$ appelé extension générique et obtenu en adjoignant à $M$ un ensemble générique $G$ et à démontrer que certains nouveaux sous-ensembles de ce modèle étendu ne satisfont pas l'hypothèse du continu ou l'axiome du choix.

[41] G. Belyi, "On the Galois extensions of the maximal cyclotomic fields", *Math.USSR-Izv.* 14 (1980) p. 247-256.

[42] A. Grothendieck, *Esquisse d'un Programme*, dans *Geometric Galois Actions* vol 1, (ed. L. Schneps, P. Lochak), Cambridge University Press, 1997, p. 5-48.

Belyi aux dessins d'enfants[43]. Il pose que si $C$ est une courbe algébrique définie sur les complexes, alors dire que $C$ peut être défini sur un corps de nombres équivaut à dire qu'il existe un morphisme fini de C sur $\mathbb{P}^1$ non ramifié en dehors des points 0, 1 et $\infty$. Ainsi « toute carte orientée finie se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe. » Une carte est un graphe dessiné sur une surface dont le complément du graphe dans la surface est une réunion disjointes de régions appelées faces, chacune étant homémorphe au disque ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les points de la courbe algébrique au-dessus des trois points de branchement correspondent aux sommets, aux centres des arêtes et des faces de la carte. La multiplicité des zéros et les valeurs d'une fonction rationnelle appelée *fonction de Belyi* sont les ordres des sommets et des faces. Ainsi que le remarque Grothendieck, les conséquences du théorème de Belyi ouvrent sur un monde qui n'est que partiellement exploré.

> « Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique ne m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus. S'agissant ici de cartes sphériques, donnant nécessairement naissance à des courbes de genre 0 (qui ne fournissent donc pas des "modules"), on peut dire que la courbe en question est "épinglée" dès qu'on fixe trois de ses points, par exemple trois sommets de la carte, ou plus généralement trois centres de facettes (sommets, arêtes ou faces) – dès lors l'application structurale $f : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ peut s'interpréter comme une fonction rationnelle $f(z) = P(z)/Q(z)$ dans $\mathbb{C}(z)$ bien déterminée, quotient de deux polynômes bien déterminés premiers entre eux avec $Q$ unitaire, satisfaisant à des conditions algébriques qui traduisent notamment le fait que $f$ soit non ramifiée en dehors des valeurs 0, 1, $\infty$, et qui impliquent que les coefficients de ces polynômes sont des nombres algébriques ; donc leurs zéros sont des nombres algébriques, qui représentent respectivement les sommets et les centres des faces de la carte envisagée. »[44]

L'émerveillement de Grothendieck tient au fait que le théorème établit « une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de nombres, de l'autre. » A un dessin aussi simple qu'un dessin d'enfant est donc associée une machinerie dont le but est de déterminer les invariants combinatoires qui résultent de l'action du groupe de Galois[45] universel $Gal(\overline{\mathbb{Q}} \mid \mathbb{Q})$. Trois points suffisent pour épingler la courbe

[43]Cette correspondance est détaillée dans L. Schneps, "Dessins d'enfants on the Riemann sphere", in *The Grothendieck theory of dessins d'enfants* (ed. L. Schneps), London Math. Soc. Lect. Note Ser. 200, Cambridge Univ. Press, 1994, p. 47-77.

[44]A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme,* p. 15-16.

[45]Voir aussi François Chargois, "De l'influence de la théorie de Galois sur l'oeuvre de Grothendieck" in *Géométrie du XXe siècle*, édité par D. Flament, J. Kouneiher, Ph. Nabonnand et J.-J. Szczeciniarz.

et mettre en place cette machine abstraite qui déterritorialise l'information. Il n'y a plus de raison de distinguer un plan d'expression et un plan de contenu. La machine établit une correspondance parfaite, une jonction entre la fonction de Belyi et la carte. Le diagramme est la déterritorialisation absolue du recouvrement de la courbe. Si $X$ est une surface de Riemann représentée par une équation de la forme $F(x, y)$ où $F$ est un polynôme dont tous les coefficients sont des nombres algébriques, Belyi montre que cela équivaut à l'existence d'une fonction rationnelle $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ ayant au plus trois valeurs critiques 0, 1 et $\infty$. Le couple $(X, f)$ est un revêtement ramifié de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. L'image réciproque $f^{-1}(x)$ d'un point différent des valeurs critiques 0, 1 ou $\infty$ contient toujours le même nombre de points. Ce nombre est appelé le *degré du revêtement*. Un point de ramification ou une *valeur critique* de $f$ est la valeur de la fonction $f$ prise en un zéro de la dérivée $f'$ (appelé *point critique*). La carte associée à la fonction de Belyi est l'image réciproque du segment $[0, 1]$. Un polynôme $P(x)$ est une fonction de Belyi si ses seules valeurs critiques sont 0 et 1. Dans ce cas, la carte ne possède qu'une seule face : c'est un arbre. Les sommets de l'arbre sont coloriés en blanc et noir de manière alternée. Le nombre d'arêtes accrochées à chaque sommet est la multiplicité de la racine associée à ce sommet. Le nombre d'arêtes est égal au degré du polynôme. Pour les arbres de la figure 36, chaque arbre est formé de six arêtes, le polynôme est donc de degré 6. Il possède trois racines 0, 1 et une racine notée $a$ que l'on doit déterminer. À une constante multiplicative près, le polynôme[46] est donc de la forme

$$P(x) = x^3(x-1)^2(x-a)$$

Les trois racines de ce polynôme 0, 1 et $a$ sont indiquées en noir sur la figure 36. La racine triple 0 est associée à un sommet noir trivalent, la racine double 1 est associée à un sommet bivalent et la racine simple $a$ est liée à un sommet monovalent. Cette correspondance entre racines et sommets justifie l'expression algébrique du polynôme $P(x)$ qui se lie simplement sur le diagramme. Le polynôme de Belyi dérivé est égal au produit

$$P'(x) = x^2(x-1)(6x^2 - 5ax - 4x + 3a)$$

Les racines du polynôme $Q(x) = 6x^2 - (5a+4)x + 3a$ qui intervient dans l'expression du polynôme dérivé sont associées aux deux sommets blancs bivalents. Pour que les racines soient distinctes, il faut que le discriminant de ce polynôme soit non nul

$$D(Q) = 25a^2 - 32a + 16 \neq 0$$

Appelons $x_A$ et $x_B$ les racines de $Q(x)$ et $R$ le reste de la division euclidienne de $P$ par $Q$. Ce reste est un polynôme du premier degré. Le calcul de la division euclidienne montre que $R$ est de la forme $R(x) = Ux + V$ où $U$ et $V$ ont les expressions suivantes

$$U = -\frac{1}{6^5}(16 - 32a + 25a^2)(25a^3 - 12a^2 - 24a - 16)$$

$$V = \frac{a}{2^5 3^4}(5a - 8)(25a^3 - 6a^2 + 8)$$

Comme $Q(x_A) = Q(x_B) = 0$, on en déduit que $P$ et $R$ prennent la même valeur : $P(x_A) = R(x_A)$ et $P(x_B) = R(x_B)$. Pour que $R$ prenne la même valeur en $x_A$ et en $x_B$ il faut que $U$ soit nul. Or $D(Q) \neq 0$. Par conséquent, $a$ est racinbe de l'équation

$$25a^3 - 12a^2 - 24a - 16 = 0$$

Chaque racine correspond à un arbre binaire. On peut montrer que les trois racines de cette équation sont de la forme

$$a = (4 + 6\alpha + 18\alpha^2)/25$$

[46]S. Lando, A. Zvonkin, *Graphes on Surfaces and Their Applications*, p. 93.

où $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$ et $j$ est le nombre complexe unité d'angle $2\pi/3$ ($j = (-1+i\sqrt{3})/2$). Ces valeurs déterminent la place de la racine $a$ sur chacun des arbres. Une orbite de l'action du groupe de Galois se décompose donc en trois arbres (fig. 36) qui pris ensemble forment le diagramme de cette orbite. Le corps des nombres associés à cette orbite est $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. On démontre que le groupe de Galois de ce corps est $S_3$ l'ensemble des permutations de trois objets. La conjugaison complexe $x \to \overline{x}$ transforme les arbres de droite de la fig. 36 l'un en l'autre, et laisse invariant l'arbre de gauche.

La machine de ce diagramme conjugue théorie de Galois, combinatoire et géométrie algébrique. Comme pour les diagrammes de Feynman, c'est elle qui donne la clé de lecture. Ici, le diagramme opère à la fois par fonction et par forme, parce qu'il relie dans une même opératoire une fonction (la fonction de Belyi) et une forme (un arbre binaire formé de sommets noirs et blancs). « Il y a diagramme, dit Deleuze, chaque fois qu'une machine abstraite singulière fonctionne directement dans une matière. »[47]

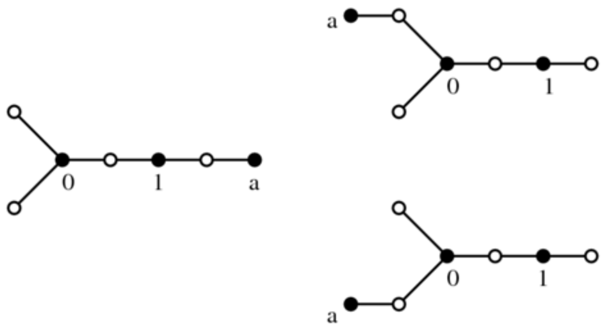



FIG. 36. Arbres binaires et fonctions de Belyi

Le diagramme passe par des singularités où l'infini est impliqué[48]. Il ne se décompose pas dans le trièdre formé des éléments syntaxiques, sémantiques et logiques, mais plutôt selon les composantes du quadrilatère épistémique. « Il y a bien une expérience diagrammatique, dit Châtelet, une provocation à l'intuition engendrant toute une imagerie que les mathématiques viendront valider ensuite : savoir esquisser la solution en pointillés, c'est toute la force du diagramme. »[49] Dans les diagrammes de Belyi, la virtualité est la puissance opératoire de la machinerie diagrammatique. La fonctorialité décrit les relations entre catégories et les divers domaines mis en œuvre par la proximité de domaines mathématiques éloignés. La composante universelle exprime l'unicité de la fonction de Belyi. Enfin, la dualité relie les expressions polynomiales des arbres conjugués. Les diagrammes se combinent les uns avec les autres et forment une véritable algèbre dont l'agencement machinique débouche sur une théorie transformationnelle plus que sur un nouveau langage.

[47]G. Deleuze, *Mille plateaux*, p. 178.

[48]Pour une courbe de genre 0, les ramifications en 0 sont les racines du numérateur $P(x)$ de la fonction de Belyi $\beta(x)$, en l'infini les racines du dénominateur $Q(x)$ de cette même fonction et en 1 les racines de la différence $P(x) - Q(x)$.

[49] G. Châtelet, *A propos de Penrose et de Shadows of the mind*, p. 1.

CHAPITRE 5

# Invariants et universaux

Le diagramme est une cartographie d'où émergent des invariants. Ces invariants sont par leur ubiquité de puissants outils de classification. Ils donnent la possibilité de classer des êtres connus ou inconnus et dans ce cas de leur attribuer une identité. Dans l'étude mathématique d'une famille d'objets, on observe les transformations qui font passer d'un objet à l'autre. L'invariant est cette caractéristique des objets qui n'est pas modifiée par ces transformations. Lorsque l'invariant est unique, il devient un outil universel. Ce sont ces outils que l'on utilise pour décomposer et analyser une situation. En ce sens, la déconstruction est une combinatoire d'invariants. L'essentiel de l'universalité est dans la jonction entre une généralité tournée vers l'Être et une totalité immanente tournée vers l'Un. Dans son opposition des universels et des particuliers, la logique ne retient que la première composante, alors que la théorie mathématique des catégories réintroduit l'universel dans ce qu'il a d'unique et de singulier.

### Universaux et prédicaments

Dans la philosophie antique comme dans la philosophie du Moyen-Age, la question des universaux est présentée comme un problème de logique où on oppose l'universel aux particuliers. L'ontologie est discutée dans des *Sommes de logique*. Le terme "prédicaments" est utilisé pour désigner les universaux, soulignant que le problème se place aux niveaux des prédicats, et que tel qu'il est posé, le problème est une question de topos, puisqu'il s'agit de connaître avant tout le *lieu* de l'universel. Certains pensent que l'universel est d'une certaine manière dans les individus en dehors de l'âme, d'autres pensent que l'universel n'a pas d'existence en dehors de l'intellect. Selon Guillaume d'Ockham, les universaux n'ont aucun fondement réel dans la chose individuelle. Les universaux n'existent que dans l'intellect, et par conséquent que dans la connaissance. Mais cette connaissance passe par le langage, puisque l'homme exprime par des termes les concepts qu'il forge et emploie ces concepts pour dire ce qui est. C'est pourquoi il ne peut connaître intimement que la teneur de ce dont il est conscient.

Dans le carré d'Apulée, les universels sont inséparables des particuliers. Ils se définissent mutuellement car, comme le remarque Armstrong, « les universels ne sont rien sans les particuliers, les particuliers ne sont rien sans les universels. »[1] L'universel est toujours la généralisation d'un particulier, le *quelque soit* d'un *il existe*. Cette définition est une assertion logique derrière laquelle se profile toujours les quantificateurs ($\forall$ et $\exists$) qui sont en quelque sorte les figures hypostasiées du couple universel-particulier. A cette conception s'oppose la définition topologique qui construit l'universel par fonctorialité. En théorie des catégories, l'universalité d'un objet n'impose pas son existence pour tous les lieux et pour tous les temps. Les limites et les produits sont des objets universels, pourtant on connaît des espaces dans lesquels ils n'existent pas. Ce qui ne veut pas dire que ces notions ne sont pas

[1] D. Armstrong, *Universals and Scientific Realism, vol 1 : Nominalism and Realism,* Cambridge University Press, 1978, p. 113.

universelles, mais simplement que toutes les notions mathématiques ne sont pas représentables dans notre espace physique. L'exemple de la boule ultramétrique dont tout point est centre de la boule illustre parfaitement cette inadéquation de notre espace physique à représenter les objets que nous concevons. Est-ce à dire que ces objets n'existent pas ? On leur accordera au moins une existence épistémologique, puisque que la science sait les construire, ainsi qu'une existence linguistique puisqu'on peut les nommer. La question est donc de savoir s'ils ont une existence ontologique.

Reconnaissons deux attitudes différentes : le réalisme et le nominalisme. L'idée réaliste est que les universels ont en commun une entité générale qui les caractérise. Par exemple, tous les chats ont en commun une même ressemblance qui nous conduit à les ranger sous un même classificateur "chat". Plus scientifiquement, on dira que les chats sont tous les animaux partageant le même code génétique. D'un point de vue mathématique, ce que fait le réaliste est de construire une relation d'équivalence et de fabriquer l'espace quotient de l'ensemble de tous les animaux par la relation d'équivalence "a le même code génétique que mon chat". Ainsi la classe chat devient une généralité abstraite dans laquelle tous les éléments se ressemblent. Il n'y a pas de chat privilégié : chaque élément de la classe est un représentant de la classe d'équivalence. La même idée vaut pour le triangle évoqué par Descartes. Il n'existe pas de triangle universel, mais tous les représentants de la classe triangle ont une correspondance avec un triangle de notre espace physique. Dans cette approche, l'universel est un nom générique représentant un objet général qui s'instancie dans chaque particulier de la classe. On l'assimile souvent à une forme abstraite qui se matérialise en autant d'objets qu'il existe de particuliers. Mais ce qui lui donne vie est son expression diagrammatique constituée des segments de droites reliant trois points non alignés coplanaires. Ce n'est pas un nom qui définit le triangle universel. Pour le réaliste, les universels ne renvoient à aucune forme d'existence ou de réalité hors de la pensée. Les noms sont arbitraires. Si la plupart du temps, l'universel est la considération d'une propriété essentielle qui est appliquée à l'ensemble indéfini des cas semblables pour pouvoir la représenter et classer les objets, il faut bien comprendre que l'universel est ailleurs. Pour le triangle, il est dans l'impossibilité de construire une autre figure qu'un triangle avec trois côtés seulement. C'est là que réside l'universalité qui n'est pas dans la déclinaison d'une propriété à l'ensemble de ses semblables, mais dans ce que son existence a d'unique. Si nous prenons six segments de droites, nous pouvons construire un hexagone, mais aussi une autre figure faite de deux triangles accolés par un sommet commun. Avec trois segments de droites de longueur quelconque, il n'y a qu'une seule figure envisageable. Cette unicité est essentielle et c'est elle que la théorie mathématique des catégories généralise par le biais de foncteurs dans la définition des objets universels.

Les thèses d'inspiration nominaliste font le plus souvent référence à la notion de *ressemblance*. Il n'existe que des instances particulières et c'est parce que ces instances se ressemblent d'un certain point de vue qu'elles forment une classe. L'existence de cette classe suppose ou induit l'utilisation d'un nom pour la désigner (la blancheur, la triangularité, etc.) La répartition en classes est pragmatique et il existe bien des manières de ranger les mêmes objets dans des compartiments différents. Mais si on admet que c'est uniquement la notion de relation qui induit les classes par passage au quotient, il faut considérer que ce n'est plus les genres et les espèces qui importent, mais bien plus les relations elles-mêmes. Il faut donc reconsidérer la pertinence des relations et éventuellement classer ces relations. Dans l'appréhension qu'on peut en avoir, le sens ontologique est relativisé par les manières de classer qui sont arbitraires. Qui décide de ce choix ? Est-il toujours possible ? L'universalité ne peut-elle être reconnue qu'au niveau des mots ? C'est bien à ce constat que conduit la notion de ressemblance. L'argument de Berkeley et de Hume dans leur critique des idées générales abstraites de Locke est que l'universel ne peut exister puisqu'il est impossible de représenter des idées générales abstraites. On ne peut se représenter que des idées particulières. C'est tout l'enjeu du diagramme : être capable de représenter l'universel au delà des simples formes graphiques. Pour nous (mais on pourrait trouver des exemples analogues dans d'autres civilisations), ce qu'évoque le symbole infini $\infty$ ou celui d'appartenance $\in$ est une idée qui n'a pas de représentation particulière, autre que ce simple signe. Le diagramme donne plus à voir que le symbole car l'universel qu'il représente est l'expression de la machinerie qu'il met en place.

Autant il est facile de comprendre sur une instance ce que la blancheur signifie, autant il est impossible de concevoir ce qu'est une instance infinie. Considérer que l'ensemble des nombres naturels est une instance de l'infini pose de nombreuses questions, car cette instance repose sur un manque (celui de plus grand élément) et non sur une existence explicite (autre que l'ensemble lui-même) d'un objet qui représenterait l'infini. L'ensemble des nombres entiers est infini car il n'a pas de plus grand élément. On ne peut admettre que la relation "ne pas avoir de plus grand élément" caractérise la classe des ensembles infinis, car cela suppose une relation d'ordre qui n'existe pas pour tous les ensembles. Cette relation ne peut pas déterminer les objets infinis puisqu'il existe des objets infinis pour lesquels cette relation n'a pas de sens. D'autant que l'existence de l'ensemble des entiers naturels est axiomatique, et que de plus, et surtout, toutes les collections ne sont pas nécessairement des ensembles. L'infini s'applique donc à beaucoup plus d'objets que les ensembles de nombres et on ne peut considérer que la relation "ne pas avoir de plus grand élément" soit une relation caractéristique des objets infinis. La notion de ressemblance ne peut pas s'appliquer ici puisque ressembler à l'ensemble des entiers ne décrit pas tous les objets infinis. Il reste que l'ensemble des entiers naturels, comme celui des nombres pairs ou des nombres impairs ou celui des nombres premiers sont des instances de l'infini. Imaginons que l'ensemble des entiers soit un ensemble replié sur lui-même. Supposons que les nombres entiers se placent sur un cercle. A chaque tour, on place 100 nombres et on tourne sur le cercle indéfiniment. On place d'abord les nombres de 0 à 99, puis de 100 à 199, puis de 200 à 299 et ainsi de suite indéfiniment. La représentation de l'ensemble des entiers est donc un cercle. Mais ce cercle est un objet fini. L'ensemble des entiers qui a été replié comme on plie une carte de géographie pour la ranger dans un tiroir est-il une instance de l'infini ? Assurément puisqu'on tourne indéfiniment sur le cercle. Mais ce cercle est fini. La propriété d'être infini est donc plus une propriété du processus d'énumération des entiers que de l'ensemble des entiers lui-même. L'ensemble se constitue au bout du processus d'énumération. La question se pose alors de savoir si l'ensemble des entiers a une existence au-delà de ce processus d'énumération. Or il n'existe pas de relation d'équivalence qui permette de construire un nombre fini de classes finies par quotient d'un ensemble infini. C'est l'inexistence d'une telle relation qui garantit l'universalité de l'infini pour ces ensembles et sous-ensembles de nombres entiers. On revient à cette définition de l'universalité non en tant qu'instanciation dans des particuliers, mais en ce qu'elle a d'unique et de singulier. L'universel est donc à la jonction de l'axe ontologique de l'Être et l'axe ontique de l'Un, mélange ultime de généralité et d'*uni*-versalité proprement dite. La généralité n'est que l'expression de son organon.

Le point faible du nominalisme n'est pas de faire dériver la généralité de la ressemblance, mais de ne pas voir que la ressemblance est une relation, et en tant que telle, un universel. Les concepts ne peuvent se réduire à des percepts et par conséquent toutes les entités ne sont pas des particuliers. Inversement, tous les particuliers ne peuvent se réduire à des universels. C'est l'approche logique qui a historiquement lié les universels aux particuliers. Chez Russell, la question de savoir si la philosophie doit distinguer les particuliers et les universels revient à la question de savoir s'il faut distinguer les sujets des prédicats. Car s'il n'y a pas de relation spécifique de prédication, on ne peut pas distinguer particuliers et universels. Dans l'analyse de J.S.Mill, les noms propres n'ont pas de signification et désignent des particuliers. L'objet universel n'est pas simplement un nom, fût-ce un nom propre sans signification. Pour autant, il ne faut pas réduire les universels aux seules relations et les particuliers aux non-relations ou aux objets du monde sensible. Les objets de perception sont des particuliers, comme les céphalées sont des particuliers de la douleur. Les non-relations ne se partagent pas plus en sujets et prédicats, qu'en constituants saturés ou non-saturés. Le partage catégoriel mathématique en objets et morphismes le montrent bien. Objets et relations ne recoupent ni les universels et particuliers, ni les sujets et prédicats. L'universel est trans-catégoriel.

Ne considérer l'objet universel que du point de vue logique conduit à des paradoxes. On connaît la démonstration de Stanislaw Lesniewski de la contradiction de la définition d'un objet universel. Lorsqu'on définit l'objet universel relativement à un groupe d'individus (A, B, C, ...) comme un objet $U$ qui possède uniquement les propriétés communes à tous les individus du groupe, on aboutit à une contradiction. En effet, si l'objet $A$ possède la propriété $\mathcal{P}$, mais que les autres individus du groupe ne possèdent pas cette propriété, alors l'objet universel $U$ ne peut pas posséder cette propriété. Mais alors l'objet universel $U$ a la propriété $Q$ de ne pas posséder la propriété $\mathcal{P}$. Cette propriété $Q$ de ne pas posséder la propriété $\mathcal{P}$ n'est pas commune à tous les individus (puisque $A$ ne la possède pas). Donc $U$ ne possède pas la propriété $Q$. Par conséquent, $U$ ne peut pas avoir la propriété $Q$ de ne pas posséder la propriété $\mathcal{P}$, puisque cette propriété n'appartient pas à l'ensemble des individus. On a donc une contradiction : $U$ possède et ne possède pas la propriété $Q$. On peut voir dans cette contradiction une version du paradoxe du menteur. Considérons la proposition $P$ : "Cette proposition n'est pas démontrable". Si $P$ est démontrable, alors $P$ est vraie et non démontrable. Donc $P$ est démontrée et démontrable. Dans cette version simple du paradoxe, on confond contenu et contenant, plus précisément la proposition $Q$ et la proposition $P$ : "Cette proposition [à savoir la proposition $Q$] n'est pas démontrable". Dans la version spatiale, le paradoxe met face à face deux propositions identiques (mais distinctes !)

| | |
|---|---|
| La phrase écrite en face<br>est fausse<br>(1) | La phrase écrite en face<br>est fausse<br>(2) |

Si la phrase (1) est vraie alors la phrase (2) est fausse. Inversement si la phrase (2) est fausse alors la phrase (1) est vraie. On a donc équivalence entre "la phrase (1) est vraie" et "la phrase (2) est fausse". Mais les phrases (1) et (2) sont identiques, donc (1) = (2) et par conséquent dire que la phrase (1) est vraie est équivalent à dire que la phrase (2) est vraie. On a donc contradiction puisque cela revient à affirmer que la phrase (2) est à la fois vraie et fausse. Dans la version de l'objet universel, le paradoxe joue de la même manière sur la fausse identité du contenu et du contenant. L'affirmation que l'objet universel n'existe pas parce qu'il est contradictoire n'est donc pas recevable. Dans un univers donné, l'universel existe. C'est, nous l'avons vu, une des conséquences de la notion d'univers de Grothendieck et un des avantages de la théorie des catégories de l'avoir formalisé.

### L'universel en théorie des catégories

Ce qui n'a pas été suffisamment souligné par les épistémologues est que la théorie mathématique des catégories définit précisément ce qu'est un problème universel. Et par suite, elle définit l'objet universel comme la solution d'un problème universel. Rappelons la définition de cette universalité.

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur de la catégorie $\mathcal{A}$ vers la catégorie $\mathcal{B}$ et $B$ un objet de la catégorie $\mathcal{B}$ (voir fig. 37). La solution du problème universel induit par le foncteur $F$ est le couple $(A, \pi)$ où $A$ est un objet de la catégorie $\mathcal{A}$ appelé *objet universel* et $\pi$ est un morphisme de $B$ vers $F(A)$ tel que pour tout objet $X$ de la catégorie $\mathcal{A}$ et pour tout morphisme $g : B \to F(X)$, il existe un unique morphisme $f : A \to X$ tel que $g = F(f) \circ \pi$. En d'autres termes, l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, F(X))$ qui à chaque $f$ associe $F(f) \circ \pi$ est bijective.

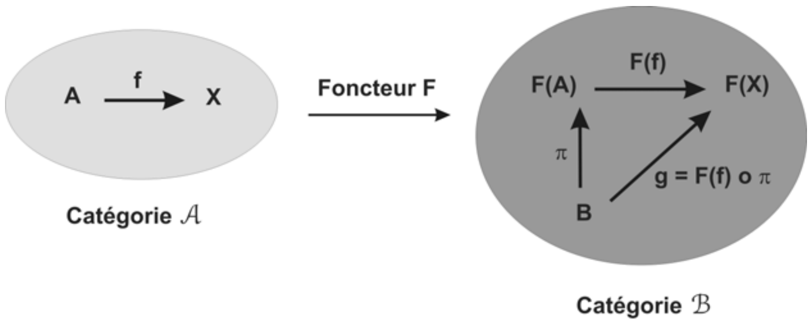



FIG. 37. Problèmes universels

La définition mathématique repose donc sur le caractère fonctoriel qui est la voie de passage entre catégories ainsi que sur l'unicité du morphisme $f$ qui est en quelque sorte la cheville ouvrière de la translation au sein d'une même catégorie des propriétés de l'objet universel. Les catégories mathématiques contrairement aux catégories philosophiques ne se présentent pas comme les modalités ou les relations conceptuelles les plus universelles possibles, mais construisent en leur sein l'universalité des objets par le biais de foncteurs. L'universel nait des catégories et n'est pas une forme imposée de l'extérieur qui se matérialiserait dans des particuliers. C'est son caractère singulier et ce qu'il a d'unique qui définit l'universel. Comme la définition est valable pour tous les objets $X$, on voit que c'est grâce à tout un réseau à la fois d'objets et de morphismes que l'universalité fonctionne. La multiplicité des objets se concentre à travers celle des relations conceptuelles pour ne retenir que son sens étymologique "ce qui se tourne vers l'Un". C'est ce rassemblement du multiple dans l'Un qui définit l'universel. C'est aussi cela qui inaugure l'ordre catégoriel, sans qu'il y ait de catégorie universelle. Contrairement aux catégories aristotéliciennes qui attribuent une place centrale à la substance[2], il n'y a pas en mathématique de notion hiérarchique de catégories.

La définition de l'universalité est trans-catégorielle. Elle est posée entre deux catégories. Mais elle peut aussi s'appliquer à une seule catégorie (il suffit de prendre dans la définition $\mathcal{A} = \mathcal{B}$). Il n'en demeure pas moins que la définition de l'universalité repose sur la fonctorialité. Les sommes, les produits et plus généralement les

[2]La substance est placée au centre des neuf autres catégories dans les diagrammes d'Ibn' Arabî, cf. *La production des cercles*, 1996.

limites sont des solutions de problèmes universels. Il existe des espaces dans lesquels il n'est pas possible de définir des sommes et des produits. Pour toute famille d'objets $(A_i)_{i \in I}$, la notion de produit est un problème universel. La notion duale d'un produit appelée le *coproduit* est aussi un problème universel. Les coproduits n'existent pas toujours. Dans la catégorie des ensembles, les coproduits existent et sont universels en ce sens qu'ils sont préservées par les changements de base. Pour les limites, on a de la même manière une définition classique de la limite appelée *limite projective* comme problème universel et une notion duale qui est la notion de *limite inductive*. Dans un topos, et c'est ce qui en fait un objet mathématique remarquable, on a toujours des limites et des colimites.

La solution d'un problème universel n'existe pas nécessairement. Si $\mathcal{A}$ est la catégorie des groupes finis et $\mathcal{B}$ la catégorie des ensembles finis, le foncteur d'oubli $F$ est le foncteur qui associe à chaque groupe $G$ l'ensemble $G$ formé des éléments de $G$ (on conserve le même ensemble et on oublie la structure de groupe). Si $B$ est un ensemble non vide, il n'y a pas d'objet $A$ dans la catégorie $\mathcal{A}$ attaché à $B$. Le problème universel n'a pas de solution[3], puisqu'il n'existe pas nécessairement de groupe associé à un ensemble donné. Ce qui ne veut pas dire que la notion de groupe n'est pas universelle, mais que la notion de groupe associé à un ensemble n'est pas universelle. On voit sur cet exemple l'importance du foncteur, qui détermine l'universalité. Par contre, si $\mathcal{A}$ est une catégorie de la catégorie des algèbres définies par des équations (comme les groupes, les espaces vectoriels, les algèbres de Lie ou les algèbres associatives) et $\mathcal{B}$ est la catégorie des ensembles, alors pour un ensemble $B$, la solution universelle est l'algèbre libre sur $B$.

Les exemples les plus simples de problèmes universels se démontrent en utilisant le foncteur d'inclusion. La complétion d'un espace topologique est un problème universel. Si $\mathcal{A}$ est la sous-catégorie des espaces complets dans lesquels toute suite de Cauchy converge et si $\mathcal{B}$ est la catégorie des espaces métriques, alors le foncteur d'inclusion $F$ induit une solution car pour chaque espace métrique $B$, il existe un espace complet $A = \widehat{B}$ et une application $\pi : B \to F(\widehat{B})$ tels que $F(f) \circ \pi$ soit bijective. La complétion est donc universelle. De la même manière, le corps des fractions est aussi un problème universel : $\mathcal{A}$ est la catégorie des corps commutatifs et $\mathcal{B}$ est la catégorie des anneaux unitaires commutatifs. Tous ces exemples montrent comment en affinant une notion mathématique, en considérant une sous-catégorie, on construit par le foncteur d'inclusion des problèmes universels dont les solutions sont de nouveaux objets universels. On voit clairement que l'universalité n'est pas établie par l'instanciation de l'objet dans des particuliers, mais par des propriétés fonctorielles.

L'universel a trois caractéristiques : l'invariance, la dualité et la localisation. Dans la définition mathématique, l'universel est *invariant* au sens où il est unique et construit pour tous les objets $X$ et pour tous les morphismes $g$. Il n'y a pas deux notions de complétion d'espaces topologiques et cet universel est local aux catégories envisagées. Autrement dit, l'universel est indexé par les catégories. Ce qu'il y a de surprenant dans cette propriété est que l'universel ne mette pas en avant le sens commun d'un universel valable "à tous les peuples et pour tous les temps". Comme les catégories sont des collections suffisamment vastes pour englober tous les objets de même nature ainsi que les morphismes qui leur sont associés, leur territorialisation ne nuit pas à leur universalité. Si l'universel est impliqué dans l'ordre catégoriel, ne faut-il pas distinguer comme Platon le fait pour la chose, trois états de l'universel : *ante categoriam, in categoria, post categoriam* ? Selon Platon, l'universel *ante rem* est l'universel antérieur à la chose, qui donne l'être à la matière,

[3]Les *diagrammes localement libres*, inventés par R. Guitart et C. Lair, remplacent souvent les solutions des problèmes universels, lorsque ces problèmes n'ont pas de solution.

l'universel des mathématiques. C'est la cause formelle de la génération de tous les engendrés. Il possède tout l'être de la chose et existe avant elle. Il est perpétuel et immatériel. Par conséquent, il est le principe de la science et se trouve chez tous les êtres animés toujours et partout identique. Dans le vocabulaire de la logique, il est prédiqué et inhérent à plusieurs particuliers. Mais dans l'approche catégorielle, il ne peut exister d'universel *ante categoriam*, puisque l'universel est une expression fonctorielle entre catégories. Le deuxième universel ou universel *in re* est la forme imprimée aux choses à partir du premier universel, la forme participée en acte ou en puissance. L'universel *post rem* est quant à lui postérieur à la chose, c'est la forme abstraite dégagée de l'expérience. Toutes ces modalités de l'universel ne peuvent se transcrire au niveau des catégories. D'ailleurs, même au niveau de la chose, ce découpage tente d'associer une temporalité causale à l'universel. Or l'universel ne peut se partager entre une cause d'avant la chose et une chose résultat de la cause.

Observons que toute catégorie a une catégorie duale obtenue en renversant le sens des morphismes. Pour autant, tout objet universel n'est pas nécessairement double. Puisque justement l'universel est ce qui est versé à l'Un. Remarquons d'abord qu'il n'y a pas de récursion infinie dans la production de catégories duales. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, la catégorie duale $\mathcal{C}^{op}$ est obtenue en renversant les flèches. Un nouveau renversement redonne les flèches d'origine. La catégorie biduale $(\mathcal{C}^{op})^{op}$ est donc égale à la catégorie d'origine $\mathcal{C}$. Mais s'il existe des catégories et des catégories duales, on pourrait penser qu'il existe non pas une universalité des choses, mais deux universalités, quelque chose qu'on pourrait appeler une *2-versalité*, ou une *biversalité* ou encore une *co-universalité*. En réalité, ce n'est pas la question d'universalité qui pose problème. Que l'universel soit défini avec des morphismes pointant dans un sens ou dans le sens contraire importe peu. Ce qui importe est plutôt la notion de dualité. Il existe en mathématiques plusieurs notions de dualité, qui se ramènent les unes aux autres. La *dualité algébrique* définit le dual d'un espace vectoriel $E$ sur un corps $k$ comme l'ensemble des applications linéaires de $E$ vers $k$. Si $E$ est un espace de dimension finie, alors l'espace $E$ est isomorphe à son dual $E^*$. Mais en dimension infinie, le dual $E^*$ est plus gros que $E$. L'espace $E$ s'injecte dans son bidual $E^{**}$ ($E \hookrightarrow E^{**}$). Savoir ce que recouvre le fait qu'un objet $X$ soit égal ou non à son dual (co-$X$), être capable de dire si les objets sans duals sont plus nombreux que les objets avec duals est une question difficile. On pense que dans l'univers, matière et antimatière sont nées dans la même proportion, que le refroidissement qui a suivi le big-bang a provoqué une rupture de symétrie dont la conséquence a été la prédominance de la matière sur l'antimatière. L'universalité reste toujours cette singularité, même lorsque ce qui est versé à l'Un sont des couples d'objets duals. L'existence d'un produit ou d'un coproduit est la solution d'un problème universel. Dès lors que transcendantal signifie ce qui est antérieur à toute attribution catégorielle, il en découle que l'universel mathématique n'est pas transcendantal.

## Les treillis du monde

Les invariants physico-mathématiques dessinent les treillis du monde. Prenons deux exemples : un exemple de physique (l'invariance de jauge) et un exemple de mathématiques (les invariants des nœuds). L'idée est de montrer que les invariants tissent un réseau qui délimite des invariants universels. Dans le premier cas, il s'agit des constantes universelles qui déterminent les lois physique de la nature. Dans le second cas, ce sont les invariants de Vassiliev qui représentent les invariants universels de la théorie des entrelacs.

En physique, les principes d'invariance conduisent à des lois de conservation que l'on observe effectivement dans la nature. La plupart des modèles ne se satisfont pas des quatre dimensions de l'espace-temps et recourt à des espaces de dimensions supérieures. Aucune évidence expérimentale ne permet de justifier ces dimensions supplémentaires. En théorie des cordes, l'invariance conforme n'est possible que si la dimension de l'espace cible est de 10 ou 26 selon que la corde est supersymétrique ou non. Cette invariance n'est pas imposée de l'extérieur, mais est une propriété intrinsèque de la corde.

Dans sa description de l'espace-temps, Hermann Weyl suppose que les lois de la physique vérifient une double invariance. Elles doivent être invariantes dans un changement de coordonnées indéfiniment différentiables, mais aussi invariantes de jauge. En général, l'invariance de jauge est présentée à partir des équations de Maxwell. Reprenons l'article de Weyl pour montrer que l'invariance de jauge conduit à des lois de conservation et que cette invariance débouche dans le modèle de Kaluza-Klein à de nouvelles constantes universelles.

Dans le modèle de Weyl, on suppose que l'espace temps est une variété différentiable munie d'une structure conforme, c'est-à-dire qu'elle possède une classe de métriques équivalente à la métrique de Lorentz $g_{\mu\nu}$ et qu'il existe une connexion affine sans torsion qui définit une dérivée covariante $\nabla$ qui respecte la structure conforme. Pour un représentant $g$ de la classe de métrique, la dérivée covariante est proportionnelle à $g$

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = -2A_\lambda g_{\mu\nu}$$

où $A$ est une 1-forme $A = A_\mu dx^\mu$. La transformation de jauge

$$g \to e^{2\lambda} g, \quad A \to A - d\lambda$$

laisse invariante les lois de la physique pour toute fonction $\lambda$ indéfiniment différentiable. Weyl démontre que dans sa théorie, l'invariance de jauge entraîne la conservation de la charge électrique, de la même manière que l'invariance par changement de coordonnées impose la conservation de l'énergie et de l'impulsion. D'un point de vue technique, les principes d'invariance le conduisent à cinq égalités du type de celles de Bianchi qui définissent cinq lois de conservation. Einstein ne pouvait admettre la théorie de Weyl qui contredisait la théorie de la relativité. Dans l'espace de Weyl, les longueurs dépendent du chemin parcouru selon la forme différentielle $A$. Le long d'une courbe $\gamma : \ [0,1] \to X$ la longueur $l$ sur $X$ du chemin entre les points $x_0 = \gamma(0)$ et $x_1 = \gamma(1)$ dépend du trajet parcouru

$$l(x_1) = \exp\left(-\int_\gamma A\right) l(x_0)$$

Par conséquent, la mesure des temps et des longueurs atomiques dépend des trajectoires suivies, ce qui est en contradiction, aux yeux d'Einstein, avec l'existence d'un spectre atomique stable. L'article de Weyl donne la définition moderne d'une jauge. Dans l'introduction, on lit :

> « L'équation de Dirac et les équations de Maxwell pour les potentiels $f_p$ du champ électromagnétique ont une propriété d'invariance qui est formellement analogue à celle que j'ai appelé invariance de jauge dans mon article de 1918 sur la théorie de la gravitation et de l'électromagnétisme. Les équations restent invariantes lorsqu'on fait la substitution
>
> $$\Psi \text{ par } e^{i\lambda}\Psi \text{ et } f_p \text{ par } f_p - \frac{\partial\lambda}{\partial x^p}$$
>
> où $\lambda$ est une fonction arbitraire de la position dans l'espace quadridimensionnel. Le facteur $e/ch$ où $-e$ est la charge de l'électron, $c$ la vitesse de la lumière et $h/2\pi$ est le quantum d'action ont été

> intégré dans $f_p$. La connexion de cette jauge à la conservation de la charge électrique reste inchangée. Mais une différence fondamentale, qui est importante pour avoir une parfaite adéquation avec l'expérience, est que le facteur multiplicatif de $\Psi$ n'est pas réel, mais est un nombre complexe imaginaire pur. $\Psi$ joue maintenant le rôle que $ds$ jouait dans la théorie d'Einstein. Il me semble que ce nouveau principe d'invariance de jauge, qui ne vient pas de spéculation mais de l'expérience, nous dit que le champ électromagnétique est un phénomène qui accompagne nécessairement, non pas la gravitation, mais le matériau du champ ondulatoire représenté par $\Psi$. Comme l'invariance de jauge implique la présence d'une fonction arbitraire $\lambda$ elle a le caractère d'une relativité "générale" et ne peut être comprise que dans ce contexte. »[4]

Cette nouvelle invariance de jauge revient à multiplier les longueurs par un facteur exponentiel, ce qui équivaut à remplacer la jauge originale du groupe $\mathbb{R}$ par le groupe $U(1)$. Weyl pense que la nouvelle jauge entrelace non pas l'électricité et la gravitation, mais l'électricité et la matière. Cette invariance a conduit les théoriciens à supposer que les lois devaient s'exprimer dans des espaces de dimension supérieure. Les premiers, Kaluza et Klein ont proposé une théorie dans laquelle l'espace temps est étendu à une variété pseudo-riemannienne de dimension cinq[5]. En supposant que l'espace se replie le long de cette cinquième dimension comme un cylindre, on montre que la période $L$ de cette cinquième composante

$$L = \frac{hc}{e}\sqrt{16\pi G} = 0.8 \times 10^{-30} \text{ cm}$$

ne dépend que des constantes fondamentales ($h$ constante de Planck, $c$ vitesse de la lumière, $e$ charge de l'électron et $G$ constante de gravitation). La périodicité induit une quantification des charges et des masses. Si les charges connues sont toutes des multiples de la charge de l'électron

$$q_n = n\frac{\kappa}{R}$$

formule dans laquelle $R$ est une constante fonction de la constante de structure finie $\alpha$ et de la longueur de Planck[6] $\ell_P$

$$R = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\ell_P$$

il n'en va pas de même des masses au repos des particules chargées qui dans la théorie de Kaluza-Klein[7] devraient être quantifiées $m_n = |n|/R$ de l'ordre de la masse de Planck[8]. A la suite des travaux de Kaluza et de Klein, W. Pauli étudia

[4] H. Weyl, "Elektron und Gravitation", *I. Zeitschr. Phys.* 56 (1929) p. 330.

[5] Il semble que ce soit Theodor Kaluza qui ait proposé le premier de considérer une cinquième dimension. En 1919 il a envoyé un article à Einstein qui a mis plus de deux ans avant de le soumettre à l'Académie de Prusse (*Sitzungsberichte der Preussichen, Akademie der Wissenschaften,* Berlin, 1921, p. 966). G. Nordström avait eu la même idée en 1914 (cf. *Phys. Zeitschr.* 15, 1914, p. 504), mais n'a pas développé une théorie aussi conséquente que Kaluza et Klein, bien que dans plusieurs articles il ait établi une théorie scalaire de la gravitation qui était considérée par Einstein comme une sérieuse concurrente de la relativité générale.

[6] La longueur de Planck est définie à partir de constantes universelles comme l'expression $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$. Elle vaut $1.6 \cdot 10^{-35}$ $m$ et représente la longueur à partir de laquelle la gravité commencerait à présenter des effets quantiques.

[7] En 1938, à la conférence de Kazimierz (Pologne) sur les nouvelles théories physiques, Oskar Klein proposa une théorie à cinq dimensions qui anticipe la théorie électrofaible actuelle. Il donne en effet les premiers éléments d'une théorie de jauge brisée $SU(2) \times U(1)$. Voir O. Klein, *Helv. Phys. Acta Suppl.* IV 58 (1956).

[8] La masse de Planck $m_P = \sqrt{c\hbar/G}$ vaut $2.177 \cdot 10^{-8}$ kg.

la possibilité de reconsidérer les interactions des mésons avec les nucléons dans un espace à six dimensions $M \times S^2$ formé de l'espace temps usuel à quatre dimensions $M$ et de la sphère $S^2$, sur lequel agit le groupe $SO(3)$. Il anticipe ainsi les espaces fibrés de la géométrie différentielle qui deviendront le cadre classique des futurs développements. La fibre $S^2$ est isomorphe à l'espace homogène $SU(2)/U(1)$. L'ensemble de ces développements seront repris par Yang et Mills en 1954 pour aboutir aux théories de jauge non abéliennes. L'invariance de jauge est donc un concept essentiel de la physique contemporaine qui se fonde sur l'invariance de structures algébriques.

En mathématiques, l'invariant est un objet (le plus souvent un nombre, un polynôme ou un groupe) qui reste inchangé dans une transformation qui fait passer d'un objet à un autre. Les classes d'invariants servent à caractériser et à classer des objets qui sont parfois très disparates. En topologie, le problème de distinguer deux nœuds est un problème difficile à résoudre. La question est de savoir si deux entrelacements de ficelles[9] correspondent à une même espèce, c'est-à-dire si en manipulant ces entrelacs dans l'espace, on arrive à une même configuration spatiale. Pour résoudre ce problème, le mathématicien construit des invariants. Il définit tout d'abord les transformations possibles en décomposant les mouvements (mouvements de Reidemeister), puis introduit des invariants qui restent inchangés par ces mouvements. Un invariant simple est par exemple le nombre minimal de croisements que possède le nœud. C'est un invariant des mouvements de Reidmeister, mais son principal inconvénient est qu'il ne permet pas de distinguer deux nœuds ayant le même nombre de croisements. Cet invariant n'est pas universel. Alexander, Conway, Jones et d'autres ont proposé d'associer à chaque nœud un polynôme. Bien que ces polynômes soient des structures mathématiques plus riches que le nombre, on s'est aperçu que tous ces polynômes ne permettent pas de distinguer les nœuds : il reste quelques cas où les polynômes de deux nœuds différents sont les mêmes. Les coefficients de ces polynômes se construisent à partir d'autres invariants qu'on appelle les *invariants de Vassiliev*. L'invariant universel est l'objet mathématique qui permet de distinguer deux entrelacs quelconques.

Un invariant universel existe-t-il toujours dans toutes les situations ? Si rien ne permet d'affirmer que, quel que soit le problème envisagé, même en se limitant aux problèmes physico-mathématiques, il existe toujours un invariant universel, il est du point de vue du mathématicien un incomparable outil que de construire des classes d'invariants. Inversement, si l'invariance est établie, elle démontre l'existence de nouveaux objets qui n'étaient pas nécessairement connus auparavant. L'invariance repose sur une transformation distincte des propriétés et des relations de l'objet invariant. Pour autant, l'invariance n'est pas un universel structural. Comme elle dépend de la transformation qui la fonde, elle implique des éléments autres que les seuls éléments de structure. Dans un jeu de taquin, la parité du nombre d'inversions se conserve lors des déplacements. Cet invariant est construit indépendamment de l'objet et de ses points de vue. Il ne dépend pas de l'état du jeu de taquin, mais permet de démontrer des propriétés liées à cet état. C'est le cas par exemple si le jeu a été démonté et si les pièces ont été repositionnées de sorte que le nombre d'inversions soit impair. Dans ce cas, on ne pourra jamais revenir à la position initiale des pièces (qui n'a aucune inversion, et qui est donc paire). La conservation de la parité du nombre d'inversions démontre cela de manière rigoureuse, sans énumérer toutes les possibilités. La parité du nombre d'inversions est donc un universel. Remarquons que cet universel s'instancie dans des particuliers qui prennent deux

[9]Le mathématicien distingue le *nœud* (*knot*) fait de l'entrelacement d'un seul lacet et l'*entrelacs* (*link*) composé d'un enchevêtrement de plusieurs ficelles.

valeurs (pair ou impair) et qui sont eux-mêmes des universels. Si nous particularisons un peu plus, on peut dire qu'ils s'instancient dans $\{0, 1\}$ : 0 pour les valeurs paires et 1 pour les valeurs impaires. Mais ces particuliers n'ont quasiment plus de liens avec l'objet invariant de départ. Peut-on encore dire que $\{0, 1\}$ sont des particuliers de l'invariance universelle de la parité du nombre d'inversions dans un jeu de taquin ? Assurément pas. On comprend dès lors sur cet exemple que si les universels s'instancient dans des objets particuliers, la particularité de ces particuliers n'a plus de sens, car ces particuliers ne désignent plus que leurs référents universels. Contrairement au triangle universel qui désigne des triangles particuliers, la parité des inversions, par le biais d'une construction invariante met en scène des particuliers sans mémoire qui oublient l'objet pour lesquels on les a convoqués (ici le jeu de taquin).

La théorie des nœuds a trouvé de nombreuses applications de la notion d'invariant et d'universel en relation avec l'analyse de textes et dans une nouvelle branche des mathématiques que Vladimir Turaev appelle la *topologie des mots*[10]. Dans certains textes littéraires ou musicaux existent des mots formels qui renforcent la cohésion du texte à différents niveaux d'interprétations. Dans un poème, on trouvera par exemple le mot formel *adbADbadB* (qui est une expression du nœud $9_{46}$) dans la distribution des pronoms, des couleurs et des rythmes[11]. Non seulement ces petites topologies fonctionnent comme élément structurel d'un texte, mais elles existent aussi dans des domaines plus vastes comme celui de la grammaire ou de l'étymologie, et dans l'évolution des langues où elles confirment les liens de parenté entre une langue mère et une langue fille. Ces microstructures fondent une théorie topologique des universaux de langue.

En résumé, ce que montre la notion d'invariant est que la notion d'universel n'a pas nécessairement de contraire et que la négation d'un universel n'est pas toujours un particulier. En somme, l'universel ne peut pas être considéré comme un objet de logique[12]. Il doit être reconnu dans ses aspects topologiques, de Ur-logique, pour affirmer son sens premier. Il n'intervient pas seulement dans des régimes de la pensée symbolique comme celui des mathématiques ou celui des langues naturelles, mais dans l'univers qui nous entoure, en physique comme en biologie. A cause de son caractère fonctoriel, l'universel ne peut se réduire à son caractère logique.

## L'arbre et la roue

Existe-t-il des diagrammes universels ? On ne saurait le dire. Remarquons toutefois que dans la philosophie du Moyen Age, les schémas structurels sur lesquels se déploient la connaissance ont bien souvent un caractère unique et universel. Les images s'apparentent à des représentations symboliques qui fonctionnent selon des procédés corrélés à l'ordonnancement des éléments d'un domaine. Dans la composition des *Ars*, les diagrammes ont pour rôle de montrer les correspondances secrètes, par l'entrecroisement des figures et des lieux et leur rapport à la totalité du monde. On voit d'abord des compositions construites sur le modèle de l'arbre et de la roue, puis, plus tard, et sans doute sous l'influence de l'église, des modèles triangulaires où se glissent l'ombre de la Sainte Trinité, mais aussi sous l'influence des régimes de signes, puisqu'on reconnaissait déjà au signe une découpe ternaire, enfin des enchevêtrements d'accolades que l'on trouve dans la *Dialectique* de Pierre de la Ramée, les *Tables de logique* de Giacomo Zabarella et les tableaux de l'*Encyclopédie*. Tout cela suggère l'existence d'une *épistémè diagrammatique*. Dans cette épistémè,

[10] V. Turaev, *Lectures on Topology of Words*, 2006 (arXiv CO/0609516).
[11] F. Jedrzejewski, *Tresses néoriemaniennes*, L'Ouvert, Strasbourg, 2007.
[12] Voir aussi J.Y. Girard *et al.*, *Proofs and Types*, 1989.

les figures, les arbres, les roues et les tables sont des instruments essentiels aux développements de la combinatoire qui leur est associée.

L'arbre, parce qu'il met à plat une combinatoire avec d'autres symboliques et d'autres imaginaires produit une hiérarchie des cas possibles et continue à travers l'histoire de symboliser l'ordre taxinomique. Il ne faut pas croire que la forme de l'arbre est restée inchangée ou que ce qui a changé n'est que son point d'application. L'arbre du Moyen Age est pourvu de racines qui participent autant que les branches et les feuilles à la classification des objets. La circulation des flux dans cet arbre ne va pas que des racines aux feuilles. La forme elle-même change. Au fil des siècles, les racines disparaissent et à l'âge classique les arbres n'ont plus qu'une racine unique, voir plus de racine du tout. Ce qui change n'est pas le point d'application, mais l'opératoire qui est associée à l'arbre en tant que diagramme.

Comme sa forme change, comme la machinerie diagrammatique qu'il représente est liée aux problèmes qu'il cartographie, l'arbre n'a pas l'universalité qu'il prétend. Cette cartographie est prise dans un processus méthodique, qui consiste à extraire l'arbre d'un réseau de relations, puis à parcourir dans l'arbre des chemins, à former des chaînes, à tracer des parcours. L'ordre de composition est sériel : chaîne, arbre, réseau s'emboîtent comme des poupées russes. Cette imbrication est « l'ordre des ordres ». On prétend parfois[13] que la forme de tout savoir universel est celle d'un arbre car elle est homothétique à l'arbre de la connaissance, et par suite, la forme de chaque science est aussi celle d'un arbre. Mais l'arbre n'est pas une constante universelle de l'histoire des sciences car il apparaît ou disparaît selon les époques. Pour la phylogénie, Pascal Tassy[14] a bien montré les mutations de l'arbre. L'arbre n'a pas toujours la même forme. Lorsque qu'on veut cartographier la complexité des relations, la multiplicité des synapses, l'arbre prend parfois la forme d'un buisson.

Dans l'*Arbre des sciences* de Raymond Lulle composé à Rome en 1295 (voir fig. 38), et contrairement à l'arbre de Haeckel que nous reproduisons plus loin (fig. 44), les racines sont aussi et peut-être même plus importantes que les branches. Les dix-huit racines de l'arbre représentent les neuf principes absolus ou dignités divines (*bonitas, magnitudino, duratio, potestas, sapientia, voluntas, virtus, veritas, gloria*) et les neuf principes relationnels de l'*Ars* (*differentia, concordantia, contrarietas, principium, medium, finis, maioritas, aequalitas, minoritas*). Elles alimentent les seize branches de l'arbre dont chacune forme de nouveau un arbre qui compose la forêt des sciences : l'*arbor elementalis* est un arbre dont le tronc est appelé chaos et dont les fruits sont les *elementata* qui s'appuient sur les quatre éléments, l'*arbor vegetalis* décrit les éléments du monde végétal dont les fruits sont les herbes, fondement de la médecine lulliste, l'*arbor sensualis* repose sur les principes absolus, les cinq sens et la nature animale, l'*arbor imaginalis* est l'arbre de l'imagination, l'*arbor humanalis* concerne l'homme, les arts et les sciences, l'*arbor moralis* classe les vertus et les vices, concerne l'éthique et partage les racines en bonnes ou mauvaises, l'*arbor imperilias* se rapporte à la politique, l'*arbor cœlestialis* relève de l'astronomie et de l'astrologie, l'*arbor angelicalis* se rapporte aux anges, l'*arbor aeviternalis* concerne l'immortalité, l'enfer et le paradis, l'*arbor maternalis* le mystère de la vierge Marie, l'*arbor christianalis* le mystère de Jésus Christ, l'*arbor divinalis* la théologie et les productions divines, l'*arbor exemplificalis* est l'arbre des exemples, il contient tous les arbres précédents expliqués par des allégories. Le seizième arbre est l'*arbor quaestionalis.* C'est une synthèse des questions relatives aux arbres précédents et de leurs réponses. Tous ces arbres ont les mêmes racines. Elles garantissent l'unité du savoir et fondent la classification systématique des éléments du monde. Dans l'*Ars brevis* composé à Pise en janvier 1308, comme introduction à l'*Ars generalis*

[13] M. Serres, *La traduction*, p. 28

[14] P. Tassy, *L'arbre à remonter le temps*, 1991.

*ultima* (que Lulle appelle aussi l'*Ars magna*), la combinatoire lulliste est construite sur des associations arbitraires qui ont pour but de répondre à toutes questions que l'homme se pose.

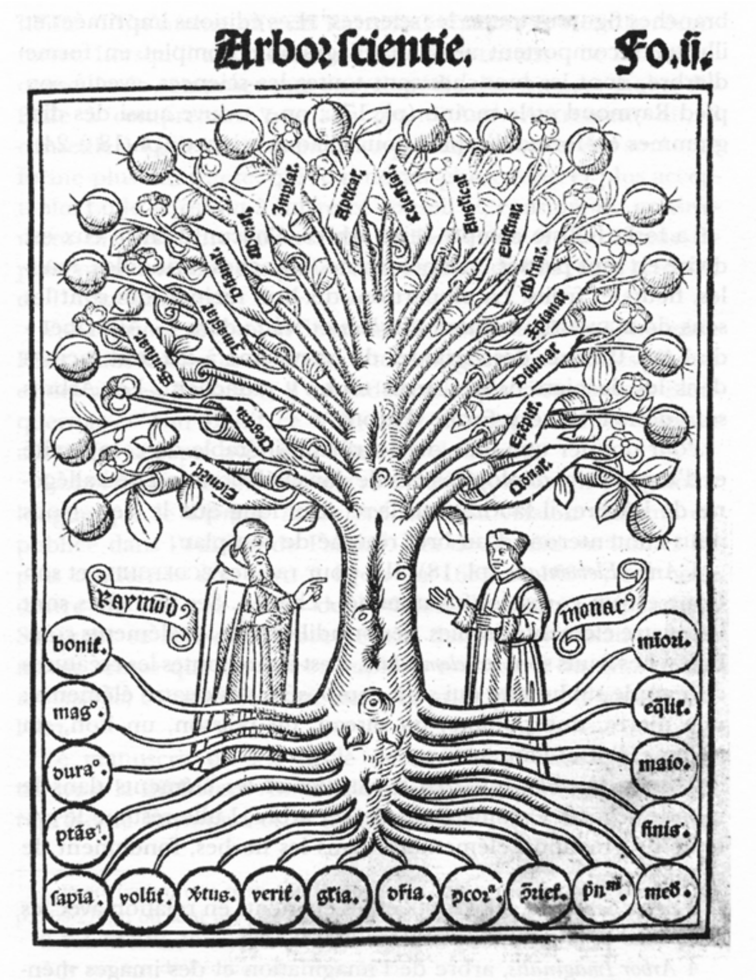



FIG. 38. R. Lulle, *Arbor Scientiae*

Les diagrammes de Lulle[15] sont construits sur un alphabet de neuf lettres BCDEFGHIK auxquelles sont associées plusieurs significations. La première figure (appelée par Lulle figure A, reproduite ici fig. 39) associe à chaque lettre un principe différent : B est la bonté, C est la grandeur, D est la durée ou l'éternité, E est la puissance, etc. La deuxième figure (appelée figure T) associe de la même manière un principe de relation à chaque lettre : B correspond à la différence, C à la concordance, D vaut pour la contrariété, E pour les principes etc. A chaque lettre sont associés une question et un sujet (voir le tableau des équivalences ci-dessous). On peut voir dans la liste des questions une interprétation des catégories d'Aristote.

[15]R. Lulle, *L'art bref*, traduction, introduction et notes de Armand Llinarès, Paris : Editions du Cerf, 1991.

| *Lettres* | *Principes absolus* | *Principes de relation* | *Questions* | *Sujets* |
|---|---|---|---|---|
| B | bonté | différence | *Quid* | Dieu |
| C | grandeur | concordance | *De quo* | les anges |
| D | durée, éternité | contrariété | *Quare* | le ciel |
| E | puissance | principe | *Quantum* | l'homme |
| F | sagesse | moyen | *Quale* | l'imaginative |
| G | volonté | fin | *Quando* | la sensitive |
| H | vertu | supériorité | *Ubi* | la végétative |
| I | vérité | égalité | *Quomodo* | l'élémentative |
| K | gloire | infériorité | *Cum quo* | l'instrumentative |

Observons comment fonctionnent la combinatoire de ces diagrammes. A chaque couple de principes absolus, disons par exemple BC (bonté, grandeur), on peut adjoindre une des sept lettres de la figure A (DEFGHIK) ou un des neuf principes de la figure T (BCDEFGHIK). On obtient ainsi seize combinaisons de trois lettres : BCD, BCE, ..., BCK. Lulle présente les couples obtenus dans un tableau de 36 cases ($8 + 7 + 6 + ... + 1 = 36$) qui forme la troisième figure de l'*Ars brevis.* La signification de chaque case est une simple transcription des lettres : le couple BC signifie *la bonté est grande*, BD *la bonté est durable*, etc. Dans la quatrième figure, Lulle envisage une combinatoire construite sur les triplets, correspondant à toutes les combinaisons de lettres et à la série de questions qui leur est associée : à la lettre B correspond la question *quid* ?, à la lettre C est associée la question *Qu'est ce que* ? et ainsi de suite. Pour repérer dans le triplet les principes sur lesquels portent la question, Lulle intercale entre les lettres un *t* minuscule. En fin de triplet, la question porte sur l'ensemble des principes comme dans BCDt, *la bonté est-elle grande et éternelle*, si le *t* est placé avant la dernière lettre la question ne porte que sur cette dernière lettre (BCtD, *la bonté qui contient en elle des contraires est-elle grande ?*) ou bien sur les deux dernières lettres (BtCD, *la bonté contient-elle concordance et contrariété ?*). En début de triplet, la question porte sur l'ensemble des éléments associés aux trois lettres (tBCD, *Que sont la différence, la concordance et la contrariété ?*).

La méthode de Lulle repose sur deux procédures qu'il appelle « évacuer » et « multiplier ». *Evacuer la troisième figure* signifie extraire de chaque case les 12 propositions et les 24 questions qu'elle renferme implicitement. Par exemple, si on note B1 le B de la première figure, B2 le B de la deuxième figure, on aura douze propositions évacuées, à savoir : B1C1, B1B2, B1C2, C1B1, C1B2, C1C2, B2B1, B2C1, B2C2, C2B1, C2C1, C2B2. *Multiplier la quatrième figure*, c'est mettre en évidence toutes les raisons qui conduisent à une même conclusion. Dès lors, la logique lulliste est en place. Il suffit dans l'esprit de Lulle de la faire fonctionner pour résoudre toutes les questions que l'on peut se poser.

Dans le *Liber principiorum medicinae*, Lulle applique les méthodes de l'Ars pour la construction de « l'arbre des principes et degrés de la médecine » (voir fig. 40). Quatre comportements sont associés aux quatre premières lettres (A sanguine, B colérique, C mélancolique et D flegmatique). Les plantes sont elles aussi associées aux quatre lettres ABCD. La *devictio* permet alors de prévoir l'effet de la plante C sur le patient A et de cartographier les remèdes pour chaque individu. L'art médical lulliste se double d'annotations astrologiques que Giordano Bruno mentionne dans son traité *Sur la médecine lulliste.* Il reproche d'ailleurs à Paracelse d'avoir utilisé Lulle sans le citer. L'influence des planètes dans les traitements médicaux est cartographiée comme tout autre paramètre et se lit directement sur les diagrammes lullistes. Si le jaspe a le pouvoir d'arrêter le flot de sang d'une blessure, c'est parce

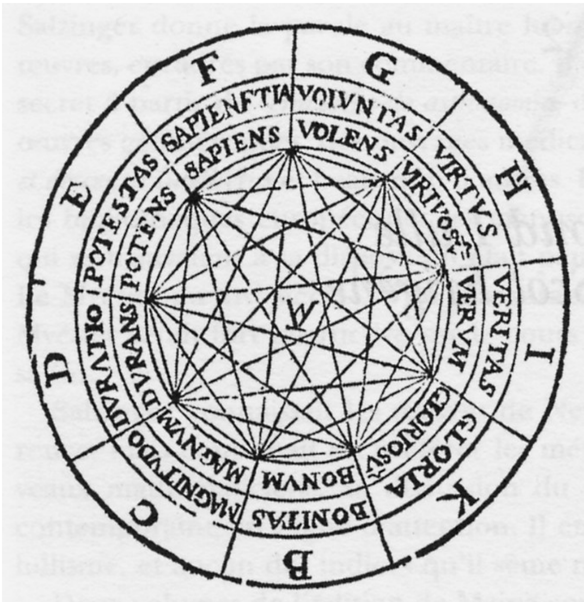



FIG. 39. R. Lulle, La roue des principes absolus

que Saturne est « siccus et frigidus » et cause de la froideur et de la sécheresse du jaspe.

L'*Ars* repose sur une correspondance arbitraire que Lulle exploite dans toutes ses dimensions pour répondre à des questions comme *Quelle est la qualité propre et première de l'entendement ?* ou *Comment le ciel se meut-il lui-même ?* Les réponses et leurs démonstrations sont souvent surprenantes. Lorsque Lulle se demande si monde est éternel ? Il répond non, et en une seule ligne de démonstration montre que si le monde était éternel, il aurait plusieurs éternités.

Au delà de l'irrationalité de cette combinatoire, ce qui frappe est la mécanique qui la meut. C'est une mécanique fondée sur le fonctionnement diagrammatique construit sur quelques principes que constituent les quatre figures de l'*Ars brevis*, et qui repose sur une topographie bien singulière. Pour que la combinatoire fonctionne, il faut que les *Dignitates* ou principes soient non seulement acte (*bonificare*), mais aussi agent (*bonificativum*) et patient (*bonificabile*). La transcription des lettres des figures $A$ et $T$ en propositions n'est possible que grâce à cette convertibilité. Dans l'*Ars demonstrativa*, la deuxième figure élémentale est composée de seize principes divins[16]. L'ordre catégoriel est toujours le même et l'art lulliste consiste en l'application de ces principes en des catégories différentes. En ce sens, l'art lulliste est fonctoriel, puisqu'il agit entre catégories. S'il relève de la magie et de l'occultisme, si les prémisses sont fausses, l'*ars combinatoria* force l'admiration par sa cohésion irrationnelle et son mécanisme élémentaire, son inférence immuable, son ampleur et sa prétention à vouloir trouver une clé universelle qui permette de déchiffrer le monde.

L'origine et la genèse des catégories ont été l'objet de nombreuses publications et sont toujours matière à discussion[17]. Dans l'*arbor elementalis*, le tronc de

[16]Ces seize principes sont les huit premiers principes de la figure A : *Bonitas, Magnitudo, Aeternitas, Potestas, Sapientia, Voluntas, Virtus, Veritas*, suivis des huit principes suivants : *Gloria, Perfectio, Justitia, Largitas, Misericordia, Humilitas, Dominium, Patientia.*

[17]Frances Yates rapproche l'art lulliste des écrits de Jean Scot Érigène et pose la question des origines des figures des arts, cite les quinze causes primordiales données par Denys l'Aéropagite :

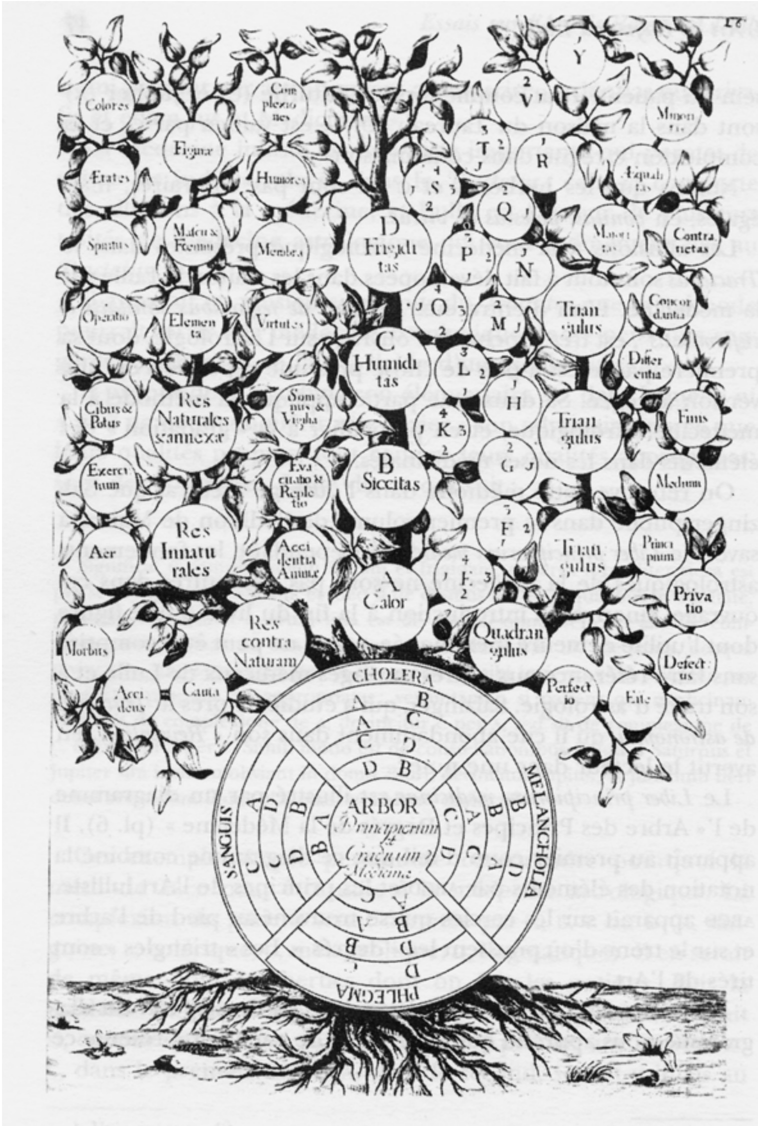



FIG. 40. R. Lulle, Arbre et roues médicales

l'arbre est un corps confus appelé chaos (« cors confus qui es appelat chaos ») d'où émergent les quatre éléments simples (*Ignis, Aër, Aqua, Terra*) privés de forme corporelle et représentés par quatre branches. Le chaos est universel. Il compte les dix catégories et les cinq prédicables de la logique aristotélicienne, que l'on trouve dans la *Logique nouvelle*[18] (*Logica nova*) écrite à Gênes en 1303. Le chaos n'est pas à l'origine des principes divins. Dans les diagrammes de Lulle, ces principes sont les racines de l'arbre élémental, alors que le chaos ne commence qu'au tronc. Ce qui peut vouloir signifier que les principes préexistent à toute matière.

*Bonitas, Essentia, Vita, Ratio, Intelligentia, Sapientia, Virtus, Beatitudo, Veritas, Aeternitas, Magnitudo, Amor, Pax, Unitas, Perfectio.* F. Yates, *Raymond Lulle et Giordano Bruno*, p. 189.

[18] La logique comprend sept parties : 1. L'arbre naturel et logique. 2. Les prédicables ou universaux. 3. Les prédicaments ou catégories. 4. Les 100 formes. 5. Le syllogisme. 6. L'application de la logique aux sciences. 7. Des questions.

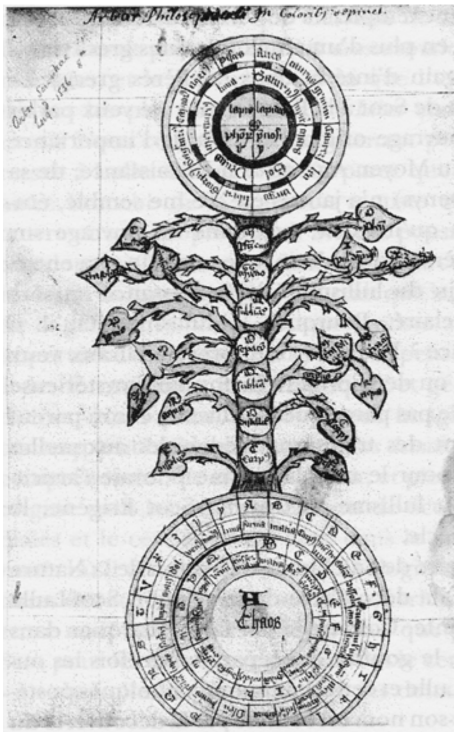



FIG. 41. Traité d'alchimie, XVe siècle

L'arbre et la roue ne sont pas les seuls diagrammes médiévaux. L'échelle bien que moins utilisée est une façon de mettre en avant l'aspect graduel et progressif du fonctionnement opératoire des diagrammes. L'*échelle de l'ascension et de la descente* compte huit niveaux : *Lapis, Flamma, Planta, Brutum, Homo, Cœlum, Angelus, Deus*. La méthode de l'*Ars generalis* appliquée à cette échelle montre comment s'élever des choses inférieures aux choses supérieures. Dans *le Livre de l'ascension et de la descente de l'esprit* rédigé vers 1305, les explications souvent mystiques reprennent les démonstrations du *Traité d'astronomie* où les astres cohabitent avec les éléments du zodiaque. Les structures hybrides qui croisent l'arbre et la roue dessinent une progression selon une échelle qui attribue un sens de parcours dans le diagramme (fig. 41). Il n'est plus possible de choisir un sens de lecture du diagramme. L'échelle impose de la gravir pour accéder aux choses supérieures. La mécanique combinatoire des arbres et des roues se complique au Moyen Age lorsque les nœuds de l'arbre sont remplacés par des roues. En fonction de la position des roues, l'arbre prend plusieurs significations (fig. 42).

L'arbre et la roue sont-ils pour autant des invariants universels ? Si la composition lulliste se rapproche plus d'un alphabet philosophique que d'une *mathesis universalis* ou d'un *ars memorativa*, il reste que l'ordre dans lequel toutes ces classifications et ces jeux de questions-réponses opèrent est universel. La mécanique lulliste aspire à un savoir encyclopédique, c'est pourquoi elle doit se fonder sur des principes universels. L'arbre de science est le point d'entrée de la forêt des arbres d'où découle la connaissance des êtres et des choses. L'entreprise lulliste permet de multiplier les arguments de manière presque infini. Mais la combinatoire ne peut fonctionner que si la structure géométrique l'autorise. L'arbre et la roue qui perdurent au Moyen Age portent le sceau de l'enchaînement prédicatif. Cette topologie ne peut garantir que d'une prémisse à une conclusion existe un chemin qui mène de

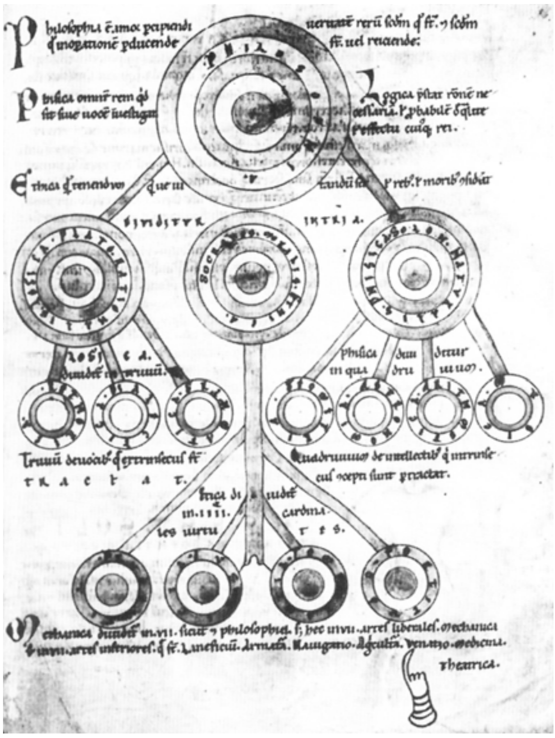


FIG. 42. Hugues Erlangen, Arbres et roues

l'une à l'autre. Les passages exclus par la configuration topologique ne reçoivent aucune justification. C'est là que réside le rejet scientifique de la combinatoire lulliste. Mais l'universalité de la figure de l'arbre reste une des caractéristiques du Moyen Age.

Porphyre présente cinq prédicables (le genre, l'espèce, la différence, le propre et l'accident) alors qu'Aristote n'en connaît que quatre (la définition, le propre, le genre et l'accident). La classification d'Aristote s'appuie sur un monde ordonné hiérarchiquement par la nécessité. Le prédicat est *nécessaire* lorsque l'état de chose qu'il décrit ne peut être autrement. « L'homme est un bipède » est un prédicat nécessaire, alors que « L'homme est assis » n'est pas un prédicat nécessaire puisque cet homme pourrait être debout. Un prédicat est dit *convertible* s'il désigne un sujet unique. « L'homme est un être animé, rationnel et mortel » est un prédicat convertible, car il n'existe pas d'autres êtres animés qui soient à la fois rationnel et mortel. Ces deux propriétés classent les quatre prédicables d'Aristote : la définition (convertible et nécessaire), le propre (convertible et non-nécessaire), le genre (non-convertible et nécessaire) et l'accident (non-convertible et non-nécessaire). L'universalité de ces invariants est garantie par la singularité (nécessité) et l'unicité (convertibilité) des prédicats. L'ajout d'une distinction entre le genre et l'espèce par Porphyre revient à séparer le genre aristotélicien en deux éléments. Il met en évidence la difficulté de définir les prédicables par la convertibilité et la nécessité. Le genre et l'espèce sont non-convertibles et nécessaires bien que situés à des niveaux ensemblistes différents. Les cinq prédicables de Porphyre – le genre (l'animal), l'espèce (l'homme), la différence (le raisonnable), le propre (la faculté de rire), l'accident (le fait de s'asseoir) – ne sont pas présents sur l'arbre qui établit une cartographie entre le genre et l'espèce.


Fig. 43. L'arbre de Porphyre

Les commentateurs de Porphyre organisent l'arbre autour d'un noyau composé des six rubriques centrales (substance, corps, corps animé, être animé, être rationnel, homme). Un de ses principaux commentateurs, Boèce place sous chaque genre les différences adjacentes sous forme de couple : à la substance, il adjoint le couple corporelle/incorporelle, au corps, le couple animé/inanimé, à l'être vivant, le couple sensible/insensible, à l'être sensible le couple rationnel/irrationnel, à l'être rationnel, le couple mortel/immortel. L'arbre se termine sur l'homme. Dans l'*Isagoge*, Porphyre donne la description de cet arbre.

> « Entre le genre le plus général et l'espèce la plus spéciale, on en trouve d'autres qui sont à la fois genre et espèce, selon le point de vue d'où on les considère. C'est manifeste dans la catégorie appelée substance : elle est en effet le genre et le corps se trouve sous elle. Sous le corps se trouve le corps animé, sous lequel se trouve l'être animé ; sous l'être animé se trouve l'être animé rationnel, sous lequel se trouve l'homme. Sous l'homme se trouvent Socrate et Platon et les hommes particuliers. Mais leur substance est leur genre le plus général, lequel est seulement genre, tandis que l'homme est

> l'espèce la plus spéciale, laquelle est seulement espèce. Le corps est une espèce de la substance et le genre du corps animé, tandis que le corps animé est une espèce du corps et le genre de l'être animé. En revanche, l'être animé est une espèce du corps animé, le genre de l'être animé rationnel ; l'être animé rationnel est une espèce de l'être animé et le genre de l'homme. L'homme enfin est l'espèce de l'être animé rationnel et non le genre des hommes particuliers, mais seulement espèce. Tout ce qui procède des individus et en constitue le prédicat le plus proche est seulement espèce et non genre. »[19]

Bien que le latin distingue les catégories ou prédicaments (*praedicamentum*) et les prédicables (*praedicabile*), il semble parfois difficile de comprendre ce qui les oppose. Parmi les prédicables, le genre et l'espèce sont des notions relatives. Le genre se dit de l'espèce, aussi bien que l'espèce se dit du genre. L'être animé est à la fois un genre de l'espèce "homme" et une espèce du genre "substance corporelle". Ce topos admet une limite supérieure et une limite inférieure. La limite supérieure des genres est formée des dix catégories d'Aristote. La limite inférieure des espèces est représentée par l'arbre de Porphyre qui en donne une classification partielle. Les genres et les espèces se nouent à travers la notion de substance.

L'arbre est une forme commode de la représentation des connaissances. Il est pour Descartes le modèle de la classification des sciences, qui se construit sur un même socle, celui de la sagesse.

> « Ainsi toute la philosophie est comme un arbre dont les racines sont la métaphysique, le tronc la physique et les branches qui sortent de ce tronc sont toutes les autres sciences, qui se réduisent à trois principales, à savoir la médecine, la mécanique et la morale ; j'entends la plus haute et la plus parfaite morale, qui, présupposant une entière connaissance des autres sciences, est le dernier degré de la sagesse. »[20]

Le même modèle se trouve chez Bacon où l'arbre est l'image d'une science universelle.

> « Les partitions des sciences ne ressemblent nullement à des lignes différentes qui coïncident en un angle, mais aux branches des arbres qui se rejoignent en un tronc (lequel tronc, avant de se diviser en branches, est entier et continu). Il est partant nécessaire, avant de traiter de la première division, de constituer une Science Universelle qui soit la mère de toutes les autres qu'on puisse considérer, sur le chemin du savoir, comme une portion de voie commune, avant que les routes ne se séparent et divergent. Attribuons à cette science le nom de Philosophie Première ou Sagesse »[21].

Cette image de l'arbre des sciences commune aux deux philosophes est à rapprocher de la forêt lulliste, qui dessine un même projet de trouver une clé universelle pour garantir une vérité absolue et embrasser dans un même diagramme l'ensemble du savoir. C'est le projet de l'encyclopédisme, qui lorsqu'il prend corps avec Diderot et D'Alembert ne peut plus reposer sur l'arbre cartésien, dont les ramifications sont insuffisantes.

---

[19]Porphyre, *Isagogè*, p. 4.

[20]R. Descartes, *Lettre Préface des Principes de la philosophie*, p. 74.

[21]R. Bacon, *De augmentis*, III, 1, in *Works*, vol. 1, p. 540-541.

> « Il y a des premiers principes, des notions générales, des axiomes donnés. Voilà les racines de l'arbre. Il faut que cet arbre se ramifie le plus qu'il sera possible ; qu'il parte de l'objet général comme d'un tronc ; qu'il s'élève d'abord aux grandes branches ou premières divisions ; qu'il passe de ces maîtresses branches à de moindres rameaux ; et ainsi de suite ... »[22]

Seules sont conservées les racines de l'arbre, ou du moins l'idée d'un fondement qui pour Heidegger donne la vérité de l'Être[23].

> « C'est pourquoi l'on peut dire que la vérité de l'Être est le fondement sur lequel prend appui la métaphysique, en tant que racine de l'arbre de la philosophie et dont elle se nourrit. »[24]

Heidegger ne retient de l'arbre que sa dimension ontologique.

> « Dans le jardin, il y a un arbre. Nous disons de lui : l'arbre est d'une belle taille. C'est un pommier. Il est peu riche de fruits cette année. Les oiseaux chanteurs aiment le visiter. L'arboriculteur pourrait encore en dire d'autres. Le savant botanique qui se représente l'arbre comme un végétal peut établir quantité de choses sur l'arbre. Finalement, un homme étrange arrive par là-dessus et dit : "L'arbre est. Que l'arbre ne soit pas, cela n'est pas." Qu'est-ce, maintenant, qu'il est le plus facile de dire et de penser : tout ce que, des côtés les plus différents, on sait dire sur l'arbre, ou bien la phrase : *l'arbre est* ? »[25]

Le texte de Heidegger amplifie la métaphore de l'arbre, symbole du monde et de l'organisation cartésienne des sciences et de la métaphysique. Il pose la question de l'existence de l'arbre en termes de points de vue, comme dans le lemme de Yoneda, à savoir que la proposition *l'arbre est* est équivalente à considérer l'arbre sous l'ensemble de ses points de vue, ou pour reprendre les mots de Heidegger à ce qu'on sait dire sur l'arbre des côtés les plus différents.

Lorsque l'arbre sert de modèle à une science pour classer ses objets, l'arbre devient un outil de présentation de filiations. Il perd sa machinerie diagrammatique. C'est le cas des arbres généalogiques qui cartographient les embranchements selon des règles prédéfinies modélisant la notion d'héritage. L'arbre est alors une classification en sous-domaines des inclusions multiples entre les objets d'une science[26]. L'arbre généalogique de Haeckel[27] (voir fig. 44) est une représentation du règne animal selon des règles morphologiques. Les classifications fondées sur le matériel génétique conduisent à d'autres classifications sans remettre en cause le modèle arborescent, si bien que ce modèle est parfois perçu comme un modèle universel.

Lorsqu'il abandonne la machine qui le fonde, l'arbre change de statut. Dans les recherches de Bielyi, l'arbre est calibré : les nœuds de l'arbre ont une position déterminée par la valeur des racines polynomiales. Dans les algèbres dendriformes, les embranchements se positionnent selon des règles imposées. L'arbre n'est pas une

---

[22]D. Diderot, *Oeuvres complètes* , Tome 7, p. 216.

[23]Voir aussi Peter Sloerdjik, *La domestication de l'Être*, Paris : Editions des Mille et une nuits, 2000, *Sphères*, 3 vol., Paris : Hachette, 2003.

[24]M. Heidegger, "Qu'est-ce que la métaphysique", *Questions I et II,* p. 24.

[25]M. Heidegger, *Qu'appelle-t-on penser ?*, p. 166.

[26]Patrick Tort, *La raison classificatoire*, Paris : Aubier, 1989.

[27]E. Haeckel *Anthropogénie*, tableau 19, p. 432, Paris : Reinwald, 1877. Reproduit dans Tassy p. 53.

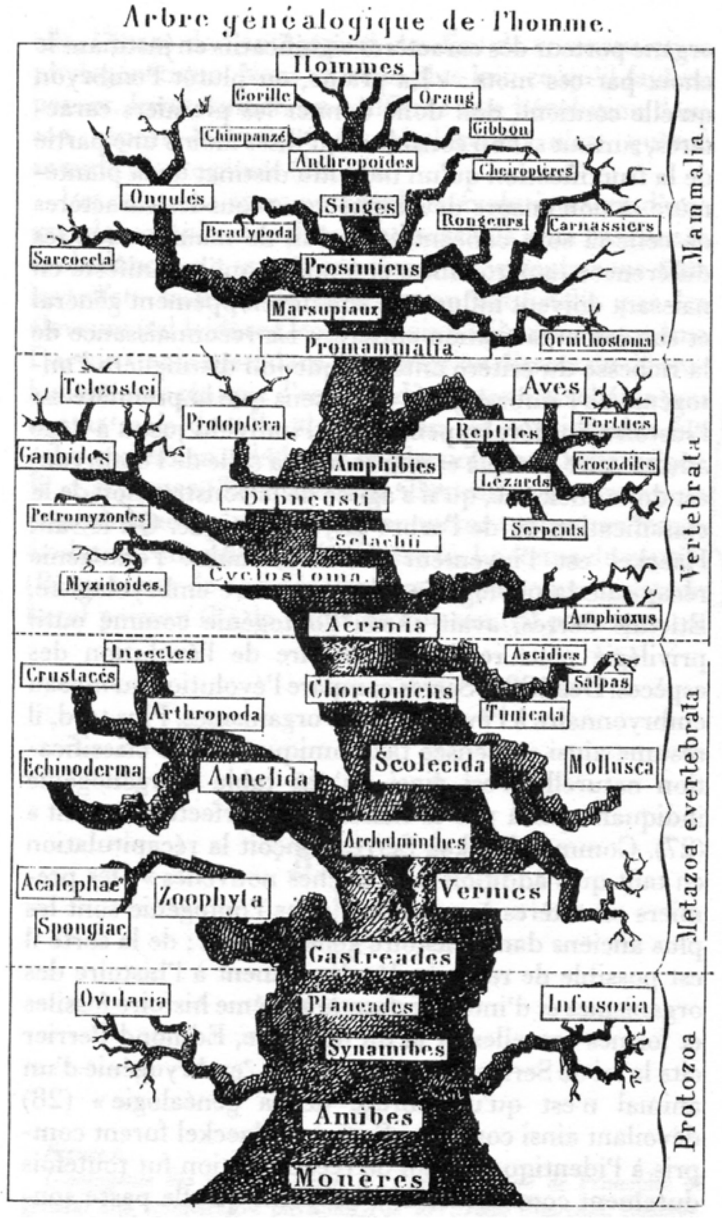



FIG. 44. E. Haeckel, *Arbre généalogique* in E. Haeckel *Anthropogénie*, tableau 19, p. 432, Paris : Reinwald, 1877. Reproduit dans Tassy p. 53

structure donnée sur laquelle s'ajoute une topologie combinatoire, il se construit dynamiquement. Dans de nombreux cas, l'actualisation du virtuel impose la forme de l'arbre, dans la position de ses nœuds et de ses branches, mais aussi dans leur longueur et dans le nombre de ses racines. L'arbre est un diagramme qui n'est pas une simple structure de données qui serait donnée ou posée, mais bien une expression de cette virtualité et non l'expression d'un ordre spatialisé, même s'il peut être perçu a posteriori comme une structure d'ordre. L'arbre est aussi le symbole des théories cognitives de la schématisation. Il est perçu comme l'archétype des méthodes de classifications de schémas graphiques. Il représente le graphe d'une structure mentale et se situe aux côtés d'autres réseaux de classifications construits sur des interconnexions multiples.

### Figures du diagramme

Existe-t-il des figures universelles de la connaissance ? des invariants diagrammatiques ? De tous temps, le savoir, ou plus simplement la représentation du savoir, s'est construit sur des formes géométriques simples. Nous avons vu comment la logique est née du carré apuléen appuyée sur quatre piliers structurels. Quatre formes qui se déclinent par similitude dans tous les champs du savoir : quatre éléments (le feu, l'eau, la terre et l'air), quatre états (le sec, le chaud, l'humide et le froid), quatre saisons (l'automne, l'hiver, le printemps et l'été), quatre formes alimentaires dans la théorie de Lévi-Strauss (le cru, le cuit, le rôti et le bouilli), quatre modalités logiques (le possible, l'impossible, le nécessaire et le contingent), quatre constantes universelles (constante de gravitation, constante de Planck, constante de Boltzmann et vitesse de la lumière) qui caractérisent la physique de notre univers[28]. Mais la stabilité de ce quadrilatère est toute relative. Il suffit de tracer les diagonales pour en singulariser le centre qui devient le cinquième élément, la quintessence. Le carré se métamorphose en pentagone. Deux pointes sur les côtés le transforment en hexagone.

Il faut éviter le piège de tomber dans la numérologie ou le pythagorisme mystique et celui de construire des formes géométriques trop élaborées. Lorsque Képler fonde l'harmonie du monde sur les solides platoniciens l'emboîtement des structures éloigne sa représentation du monde de l'ordonnancement réel des planètes. A trop chercher d'analogies, à vouloir démasquer les parentés enfouies dans les choses, la ressemblance conduit trop souvent à des représentations allégoriques. L'âge classique substitue l'analyse aux hiérarchies analogiques[29]. Certains[30] cherchent encore à dégager des constantes structurelles universelles qui seraient justiciables de tout et donneraient une explication aussi bien des structures de la parenté, du code génétique, des mythes que de la linguistique. Ces constantes permettraient de topographier l'existant. Mais qu'obtient-on de plus qu'un simple pavage qui force l'isomorphie ou la ressemblance des structures ? Pour les espaces bidimensionnels localement euclidien, un théorème de mathématiques assure que toute surface est triangulable. Pour que le pavage ait un sens, il faut qu'il fonctionne dans ses microstructures comme dans ses grandes largeurs.

Certaines figures ont une disposition unique et nécessaire. C'est le cas du triangle qui traverse les sciences et cartographie des régions enchevêtrées. Le triangle a une telle puissance que lorsque l'on présente la tétractys ($1+2+3+4=10$) des pythagoriciens c'est toujours sous la forme d'un triangle. Dans les sciences humaines, le triangle est une structure incontournable. Avec Ferdinand de Saussure et le triangle d'Ogden-Richard, la linguistique reprend l'ancienne décomposition du signe (*semion*) en signifiant (*seimainon*) et en signifié (*seimainomenon*). Hjelmslev distingue le plan de l'expression et le plan du contenu et construit sa théorie autour de la triade : forme, substance, matière. Morris divise la sémiotique en syntaxe, sémantique et pragmatique. Austin décompose l'acte de parole selon trois actes (locutoire, illocutoire et perlocutoire). Les théoriciens du discours distinguent le narrateur, le

[28]Voir G. Cohen-Tannoudji, *Les constantes universelles,* 1995.

[29]M. Foucault, *Les mots et les choses*, p. 64.

[30]Voir par exemple, Charles Morazé, *Les origines sacrées des sciences modernes.* L'auteur cherche « un code mental » capable de rendre compte des croyances, des sciences et de tout événement, quelque en soit la nature, fondé sur des structures à base de trièdres, de tétraèdres et de tétracanthes.

narrataire et le narré. Les pronoms personnels (Je, tu, il) forment la structure sociale minimale. Les grammaires s'appuient sur des structures ternaires, comme celle du genre (masculin, féminin, neutre) ou des temps (passé, présent, futur). Bien que ces découpages n'existent pas dans toutes les langues. La représentation peirceienne (representamen, interprétant, objet) répond à la représentation saussurienne (signifiant, signifié, référent). Popper distingue trois mondes. Le monde 1 est « le monde de la physique, des pierres, des arbres, de la chimie et de la biologie. » Le monde 2 est « le monde des sentiments, de la crainte et de l'espoir, des dispositions à agir et de toutes sortes d'expériences subjectives ». Le monde 3 est « le monde de l'esprit humain, les pensées et les théories, mais aussi les œuvres d'art, les valeurs éthiques, les institutions sociales. » De son côté, la psychanalyse invente une structuration de l'inconscient en trois éléments (moi, ça, surmoi). Elle associe aux trois sujets de la famille (père, mère, enfant) les trois phases du développement (orale, anale et phallique). Lacan trouve le principe trinitaire dans le modèle topologique du nœud borroméen. Le modèle du triangle RSI (Réel, Symbolique, Imaginaire) se prolonge en triades corrélatives (e.g. savoir, vérité, jouissance). La logique trinitaire invente le parlêtre aux côtés de l'être et du non-être.

Les mythologies et les religions organisent leur panthéon autour de trois dieux ou trois principes divins. Les triades sumérienne (Anu, Enlil, Ea), perse (Ahura-Mazda, Mithra, Sraosha), indienne (Brahma, Vishnu, Shiva), romaine (Jupiter, Mars, Quirinus), égyptienne (Amon, Rê, Ptah) sont-elles l'expression d'une triade unique ? Pour les anciens Egyptiens, l'être humain se compose d'un corps et de trois entités plus subtiles auxquelles il sert de support : le *ka* est le double qui accompagne l'homme au-delà de la mort. C'est son principe vital que l'on nourrit d'offrandes dans les chapelles funéraires. Le *ba* pourrait être assimilée à l'âme humaine. C'est la part divine de l'homme souvent associée à la lumière du soleil. Le troisième principe est l'*akh*, l'ombre du mort, sa partie obscure qui ne le quitte jamais et survit au royaume d'Osiris après le trépas. La mort est la séparation de ces trois entités. Le mythe relate des origines cosmiques assurant la consistance unitaire entre le primordial et l'actuel, comme entre le dit et le fait.

Les triades des religions polythéistes se retrouvent dans la religion monothéiste sous la forme du modèle trinitaire (le Père, le Fils et le Saint-Esprit). On les retrouvent aussi bien dans les hiérarchies ecclésiastiques (évêques, prêtres, diacres) que dans les hiérarchies célestes (séraphins, chérubins, trônes). Hegel pose une homologie entre la trinité chrétienne et la triade unité, scission, réconciliation. En rapprochant le Père de l'unité, le Fils de la scission et le Saint-Esprit de la réconciliation il donne à penser la trinité comme un expression de la triade dialectique (thèse, antithèse, synthèse). Il donne aussi un sens radical à la triade posée par Fichte (entendement, sensibilité, raison).

Partant de l'homologie de structure entre les différents exemples de divinités indo-européennes, Georges Dumézil a montré une organisation tripartite régissant l'ordre cosmique et l'ordre politique. Il a assigné des fonctions à ces triades : fonction sacerdotale et de souveraineté (Jupiter), fonction guerrière (Mars) et fonction de travail et de fécondité (Quirinus). Cette homologie de structure conduit à poser le triangle comme un invariant topologique. Bien que le passage de la trifonctionnalité dumézilienne à la trinité chrétienne n'ait pas été démontré, la structure impliquée est patente, mais ne prouve pas pour autant une filiation entre les triades divines et la trinité chrétienne. Georges Duby[31] a établi la correspondance entre les triades des structures sociales indo-européennes (guerriers, prêtres, producteurs) et les triades médiévales (seigneurs, clergé, paysans). L'identité des structures est la partie la plus

[31]Voir G. Duby, *Les Trois Ordres ou l'imaginaire du féodalisme*, Gallimard, 1976.

immédiate de l'identification. Pour qu'il y ait une réelle homologie, il faut que la machine diagrammatique fonctionne entre les objets qu'elle circonscrit.

L'articulation ternaire est portée à son paroxysme dans les essais de Peirce. De tripartitions en tripartitions, il établit d'abord 3, puis 9 puis 27 classes. Puis à partir de 1906, Peirce invente des strates fondées sur des divisions ternaires $3^6 = 729$ dont il ne retient que 28 niveaux, puis $3^{10}$ c'est-à-dire 59049 classes dont il extrait 66 classes. Le savoir contient trois modes d'être : la priméité (*firstness*), la secondéité (*secondness*) et la tiercéité (*thirdness*). « Premier, est la conception de l'être ou de l'exister indépendamment de toute autre chose. Second, est la conception de l'être relatif à quelque chose d'autre. Troisième, est la conception de la médiation par quoi un premier et un second sont mis en relation. »[32] Par homologie, le signe est aussi analysé dans sa dimension syntactique (priméité) où il ne réfère qu'à lui-même, dans sa dimension sémantique (secondéité) où le signe existe par rapport à son objet et dans sa dimension pragmatique (tiercéité) où il existe comme loi générale. Dans chaque sous-division, le signe trouve une décomposition ternaire. Dans la division syntactique, il se divise en qualisigne, token et type et dans sa division sémantique en icône, indice et symbole. Les triangles sémiotiques de Peirce s'enchaînent à l'infini. Un signe ou *representamen* est « une chose reliée sous un certain aspect à un second signe, son objet, de telle manière qu'il mette en relation une troisième chose, son interprétant, avec ce même objet, et ceci de façon à mettre en relation une quatrième chose avec cet objet, et ainsi de suite ad infinitum. »

La fortune de l'articulation ternaire tient à la fois de sa rétraction en un, de sa capacité à devenir une figure unitaire qui se déplie à volonté selon ses trois composantes et de sa capacité à exclure le dialogue binaire qui limite l'oscillation entre deux pôles. Une relation trine ne peut pas être considérée comme une combinaison de relations binaires même si on peut toujours décomposer un schéma triangulaire en plusieurs couples dyadiques. Pour démontrer l'indécomposabilité de la relation ternaire en relations binaires, Peirce prend comme exemple le don « A donne B à C ». La suppression d'un des acteurs conduit nécessairement à une incompréhension du don qui ne peut se passer de ces trois acteurs. Le raisonnement de la physique causale se construit sur des formes binaires comme l'action d'un corps sur un autre, et partant, livre des couples qui relèvent des formules opposées qui ne peuvent fonctionner l'une sans l'autre (l'action et la réaction). Les technologies nouvelles et les sciences de l'information consacrent le règne du binaire. Le structuralisme fait de même et propose au sein de structures plus compliquées des opérateurs binaires (le cru et le cuit, le signifiant et le signifié, etc.).

Lorsque le triangle n'a plus que deux sommets fonctionnels, le structuralisme invente la case vide, l'absent qui constitue le troisième personnage. L'existence des éléments de la trinité est corrélée à leur propre actualisation : un sujet n'existe que par l'autre. C'est l'épisode de la lettre volée. Il y a le même, l'autre et l'absent. Benveniste dans les *Problèmes de linguistique générale* trouve la figure de l'absent chez les grammairiens arabes : « pour eux, la première personne est *al-mutakallimu*, "celui qui parle" ; la deuxième est *al-muhatahu*, "celui à qui l'on s'adresse", mais la troisième personne est *al-ga'ibu*, "celui qui est absent" ».

Dans le structuralisme, la fonction diagrammatique du triangle est réduite à sa plus simple expression. On cherche une machinerie qui le ferait fonctionner : la case vide, l'autosimilarité, la théorie des groupes. Nous avons vu que la théorie des groupes (groupe de Klein essentiellement) conduit à invoquer des théories mathématiques qui ne sont pas utilisées dans toutes leurs dimensions, mais simplement plaquées comme élément structural. Dans l'autosimilarité, la décomposition d'une structure ternaire A donne (B, C) est posée. Un des éléments (disons B) devient

[32] C.S. Peirce, *Op. Cit.*, 6.32.

prépondérant et se décompose à son tour en deux nouveaux éléments : B donne (B', C'). C'est le modèle des mythologies de Barthes, de la connotation et de la dénotation. Dans les *Écrits* de Lacan, les éléments B et C, un lieu et un moment, deviennent les points de passage d'une étrange métamorphose. « Tous deux participent de cette offre du signifiant que constitue le trou dans le réel, l'un comme creux de recel, l'autre comme forage pour l'issue. » Le modèle où B et C se transforment l'un dans l'autre pointe la conversion de l'espace en temps. Cette conversion a pour nom le réel.

L'universel et les modalités de l'Être motivent la classification des systèmes philosophiques et des sciences. Chez Foucault, le trièdre des savoirs organise l'épistémè classique selon trois dimensions : les sciences physiques et mathématiques se fondent sur l'inférence logique et l'enchaînement de propositions soigneusement vérifiées, des sciences règlent l'analogie de rapports et les invariants structurels, la réflexion philosophique, troisième composante, « se développe comme pensée du Même »[33]. Ces trois dimensions excluent les sciences humaines. Chez Badiou, la théorie des ensembles, envisagée comme le socle mathématique le plus général, définit « trois types d'orientation dans la pensée et trois seulement : la pensée constructiviste, la pensée transcendante et la pensée générique. »[34] Chez Porphyre, les trois grands systèmes philosophiques reposent sur des domaines où se loge l'universel : dans la réalité (réalisme), dans le langage (nominalisme) et dans la pensée (conceptualisme)[35]. La contrepartie du concept dans la réalité est un universel qui existe à l'état séparé dans un monde idéal (réalisme) qui n'existe que dans les mots (nominalisme) ou bien encore qui n'existe que pour des individus sous forme de propriétés. *In fine*, ce qui est visé ce n'est pas la classification des systèmes philosophiques, ni le lieu de la prédication, mais la place de l'universel.

### Rhizome et diagramme

Pour décrire des interconnexions multiples et des topologies floues, pour approcher au plus près la réalité, Deleuze abandonne les figures géométriques simples et pose une nouvelle espèce de diagramme qui n'a ni commencement, ni fin, et qui ne prédispose pas l'organisation des flux. Ce diagramme qu'il appelle un *rhizome*[36] renvoie à la fois de la botanique et à toutes les autres sciences. Le rhizome de Deleuze n'est pas nécessairement un objet souterrain. Sa configuration topologique relève aussi bien des enchevêtrements de racines que des amas de galaxies. C'est une structure suffisamment complexe pour embrasser en un même lieu la disposition du réel. « À la différence des arbres ou de leurs racines, le rhizome connecte un point quelconque avec un autre point quelconque, et, chacun de ses traits ne renvoie pas nécessairement à des traits de même nature, il met en jeu des régimes de signes très différents et même des états de non-signes. » Un régime de signes constitue une sémiologie. Il n'y a pas de sémiologie générale et chaque régime de signes détermine ce que sous d'autres latitudes on appellerait des *sémiologies régionales*.

Le rhizome concentre toute la topologie deleuzienne. « Le rhizome n'est fait que de lignes : lignes de segmentarité, de stratification, comme dimensions, mais aussi ligne de fuite ou de déterritorialisation comme dimension maximale d'après laquelle, en la suivant, la multiplicité se métamorphose en changeant de nature.»

[33] M. Foucault, *Les mots et les choses*, p. 358.

[34] A. Badiou, "Platon et/ou Aristote. Théorie des ensembles et théorie des Topos sous l'oeil du philosophe" in Salanskis, *L'objectivité mathématique*, 1995, p. 79.

[35] Porphyre, *Introduction aux Catégories d'Aristote*. Cette classification, – dite des *systèmes dogmatiques* par opposition aux *systèmes de l'examen* (intuitionnisme, scepticisme) – est reprise par Jules Vuillemin qui la fonde sur l'aporie de Diodore. Voir J. Vuillemin, *Nécessité ou contingence*, p. 290.

[36] G. Deleuze, *Mille plateaux*, p. 31-32.

Le rhizome est différent du modèle arborescent. Il n'est ni centré, ni polycentré. C'est dit Deleuze une anti-généalogie.

Le diagramme d'un régime de signes est centré sur le signifiant d'où partent une série de cercles concentriques dont les chemins suivent une spirale (voir fig. 46). Le centre de signifiance (1) est relié à l'infini par une singularité ponctuelle. Dans un voisinage de l'infini le signe renvoie au signe ou si l'on préfère «l'ensemble infini des signes renvoie à un signifiant majeur ». C'est dit Deleuze une découverte des prêtres psychanalystes que « l'interprétation doit être soumise à la signifiance, au point que le signifiant ne donnait aucun signifié sans que le signifié ne redonnât à son tour du signifiant. » Sans doute cette redondance du signifiant justifie-t-elle la forme du diagramme. Elle ne peut être pensée que par une substance particulière que Deleuze nomme la *visagéité.* Le signifiant est un visage dont les traits sont l'ultime signifié et produisent à leur tour du signifiant. Tous les signes ont un même lieu d'origine (2) : un temple, un village, une steppe, etc. et tous les signes sont tournés vers un même centre de signifiance. Le passage d'un signe à un autre se fait par le saut d'un centre à son voisin (3) selon des règles précises et certaines transitions sont interdites. Le centre doit sans cesse produire de la spirale parce que la transformation du signifiant en signifié produit elle-même du signifiant (4). Le diagramme deleuzien fonctionne comme les rotoreliefs de Duchamp. Le rite du bouc émissaire ponctue la spirale. Un premier bouc est sacrifié et la ligne de fuite s'immobilise en (5). Un second bouc est envoyé dans le désert (6) pour envoyer à l'infini l'excédant du signifiant. Ajouter à cela « le corps paranoïaque du dieu despote », les relations hiérarchiques du prince et de ses sujets, des éléments de politique, de psychanalyse, d'anthropologie, etc. et vous obtiendrez la complexité du diagramme deleuzien dans ses composantes multidimensionnelles.

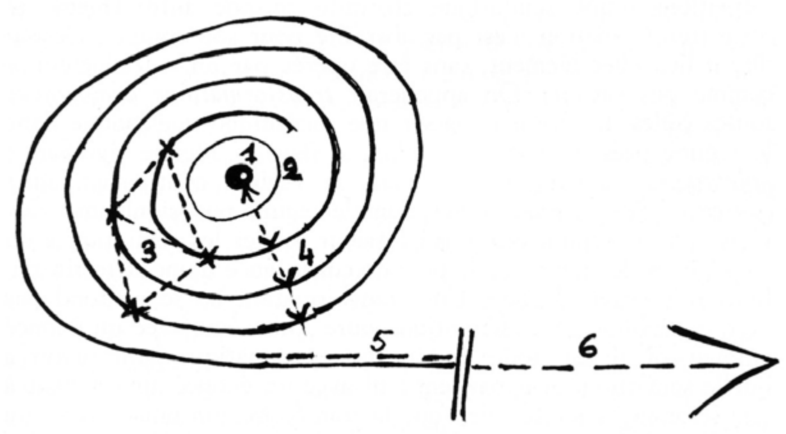



FIG. 45. Régime de signes, in G. Deleuze *Mille plateaux*, p. 169

Le diagramme est selon Deleuze une machine abstraite qui fonctionne directement dans une matière. « Elle opère par *matière*, et non par substance ; par *fonction* et non par forme (...) La machine abstraite, c'est la pure Fonction-Matière – le diagramme, indépendamment des formes et des substances, des expressions et des contenus qu'il va répartir. »[37]. Une machine abstraite, c'est exactement une catégorie mathématique. Il suffit de remplacer matière par objets et fonction par

[37] *Ibid.*, p. 178.

morphismes pour identifier machine abstraite et catégorie. Deleuze ne parle pas de cette analogie, mais il tient la machine abstraite à distance des théories linguistiques et sémiotiques. Face à Hjemslev, la machine abstraite n'a aucun moyen de distinguer un plan d'expression et un plan de contenu. Elle est totalement immergée dans le plan d'immanence qui va répartir les expressions et les contenus selon les strates et les territorialisations. Face à Peirce, le diagramme que constitue cette machine se distingue des *indices* qui sont des signes de territorialisation, des *icônes* qui sont des signes de reterritorialisation et des *symboles* qui sont des signes de déterritorialisation. Le diagramme n'est pas un outil de simple représentation, mais un objet dynamique qui fonctionne comme une machine à produire du réel ou de nouveaux objets.

Peindre la connaissance, *faire rhizome* pour reconstituer l'image du monde, dans une dynamique incessante de déterritorialisation et de reterritorialisation entre les mondes, les sites et les topoi est une démarche et un caractère que Deleuze a entrepris dès ses premiers écrits et qu'il a ensuite amplifié pour interroger l'infinie complexité des mondes. Les plateaux sont des multiplicités qui s'interconnectent par des ramifications rhizomatiques, qui posent que l'écrit n'est plus un signifié, mais un arpentage et une cartographie. C'est l'objet de la philosophie que de construire des réseaux qui relient les idées et produisent les concepts. De là, l'importance des lieux synaptiques qui sont à la charnière des strates et des couches géologiques, des niveaux et des plans que composent le savoir et le monde. Les surfaces sont toujours entaillées de modifications de reliefs que le rhizome restitue. L'Être n'est plus l'Être en tant qu'Être mais l'Être en tant qu'Être en un lieu. Le topos est le plan d'immanence sur lequel se développe la réflexion sur la philosophie des sciences. L'ontologie se mue en une onto-(po)-logie ou ontologie toposique.

Le rhizome est un diagramme, à la fois carte et machine qui se déploie dans tous les sens. Il possède des ramifications qui s'agrègent parfois en tubercules. Entre les renflements et les filaments, le flux circule dans le rhizome véhiculant l'information entre les différents points extrêmes comme les points de jonction ou synapses qui apparaissent comme autant de singularités où s'interconnectent des strates. Dans l'introduction à *Mille Plateaux*, les "caractères approximatifs" du rhizome sont énumérés sous la forme de six principes[38]. 1. Le principe de connexion affirme que tout point du rhizome peut être connecté à un autre point quelconque et doit l'être : l'entropie est maximale dans le rhizome. 2. Le principe d'hétérogénéité garantie que le rhizome – contrairement à l'arbre – ne fixe pas un ordre, « chaque trait ne renvoie pas nécessairement à un trait linguistique. » 3. Le principe de multiplicité pose que toute multiplicité est rhizomatique. « Une multiplicité n'a ni sujet, ni objet, mais seulement des déterminations, des grandeurs, des dimensions qui ne peuvent croître sans qu'elle change de nature. » 4. Le principe de rupture asignifiante répond à l'autorégulation biologique du rhizome. Lorsqu'il est coupé à un endroit quelconque, le rhizome repart dans la même direction, mais aussi prolifère selon d'autres directions. 5. Le principe de cartographie fait du rhizome une carte. Il est tenu à distance des modèles linguistiques : « un rhizome n'est justiciable d'aucun modèle structural ou génératif. Il est étranger à toute idée d'axe génétique, comme de structure profonde. » 6. Enfin, le principe de décalcomanie pose que le rhizome n'est pas un calque, mais une carte. « Une carte a des entrées multiples, contrairement au calque qui revient toujours "au même". »

Chez Foucault, le diagramme prend une dimension historique, politique et sociale. C'est le lieu de la représentation des rapports de forces, l'expression du pouvoir et des micro-actions de nos sociétés modernes. C'est une carte de matières non-formalisées, un « fonctionnement abstrait de tout obstacle ou frottement... et qu'on

[38]G. Deleuze et F. Guattari, *Mille plateaux*, p. 15.

doit détacher de tout usage spécifique. »[39] En ce sens, le diagramme de Foucault est voisin de la machine abstraite deleuzienne, mais avec un ancrage politco-social plus important d'autant qu'il est l'image des rapports de forces de la machine hôpital ou de la machine prison. Lorsque Foucault invoque la notion de diagramme, c'est toujours en rapport avec nos sociétés disciplinaires. Le diagramme ne peut être que dynamique, pris dans l'évolution temporelle et en rapport avec ce que vit l'homme sous le poids des institutions, du savoir et du pouvoir.

La dynamique le rend instable et c'est ce qui le différencie de la structure. Il ne peut représenter que des rapports abstraits et figurer des mutations. Il est dit Deleuze « intersocial et en devenir. » Il n'a pas la rigidité de la structure, bien qu'il se situe pour les formes diagrammatiques institutionnelles dans une même direction architectonique. Il cartographie le savoir. « Il appartient (...) au diagramme de s'actualiser dans l'archive. »

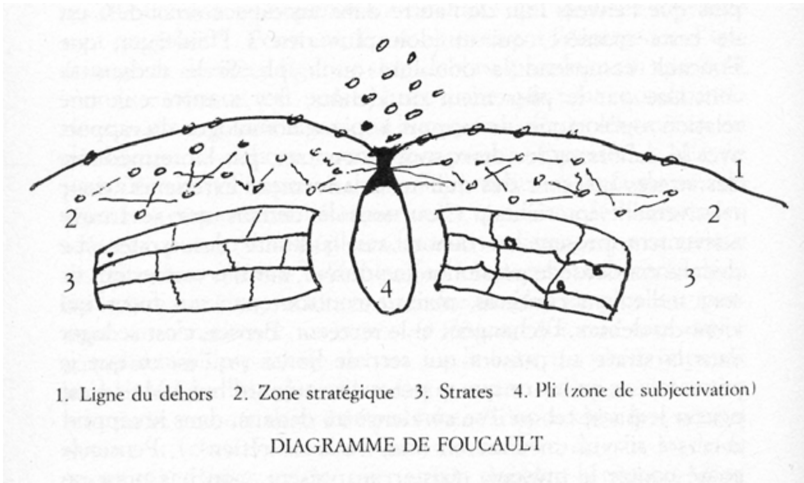



FIG. 46. Diagramme de Foucault, in G. Deleuze, *Foucault*, p. 128

Dans le livre que Deleuze consacre à Foucault, l'idée de *diagramme disciplinaire* est le lieu sur lequel Deleuze projette le travail de Foucault. Il diagrammatise plus que Foucault lui-même les dispositifs de la microphysique du pouvoir. Dans le diagramme qu'il donne de l'œuvre de Foucault (fig. 46), on retrouve les grandes topiques deleuziennes : la *ligne de partage* où s'effectue la conversion du lointain et du proche, délimitant un espace du dedans sur lequel la pensée rétrocède les propriétés du dehors, les *strates* qui stabilisent l'espace diagrammatique instable et mouvant et assurent le passage et l'ancrage au dedans, la conversion de la substance en objet stratifié, le *pli* qui délimite la zone de subjectivation qui partage les strates du monde donc du savoir en deux domaines, ceux des « tableaux visuels » et des « courbes sonores. »

**Tables de savoir**

A partir du XVI^e siècle des systèmes d'accolades de plus en plus imbriquées remplacent les éléments structuraux comme la roue, l'arbre ou le triangle. Le tableau est le diagramme de l'âge classique. Il atteint son paroxysme au XVIII^e avec l'*Encyclopédie* de Diderot et de d'Alembert (fig. 47).

[39] M. Foucault, *Surveiller et punir*, p. 207.

Bien que la métaphore de l'arbre ait suivi l'éclatement des savoirs de Descartes à Heidegger, la table – et non le modèle arborescent – est l'instrument de l'encyclopédie universelle. Elle réalise une conjonction parfaite entre les termes de la logique et l'immensité du savoir. En premier lieu, elle établit une nomenclature, un dictionnaire des termes, avant de composer les tables qui représentent l'articulation des discours de chaque discipline. La méthode qui préside à l'élaboration de ces tables repose sur une réduction du discours à des termes élémentaires et à l'introduction d'une combinatoire qui partant des termes simples, engendre l'ensemble du corpus. L'universalité du tableau s'élabore autour d'une *tabula primitiva* qui comprend les termes communs à toutes les sciences. Elle se construit aussi sur son unicité et sur l'harmonie qui résulte de ce classement. Le tableau est l'instrument qui permet de cartographier méthodiquement les sciences et de réaliser l'encyclopédie. C'est pourquoi il est inséparable d'une science de la méthode.

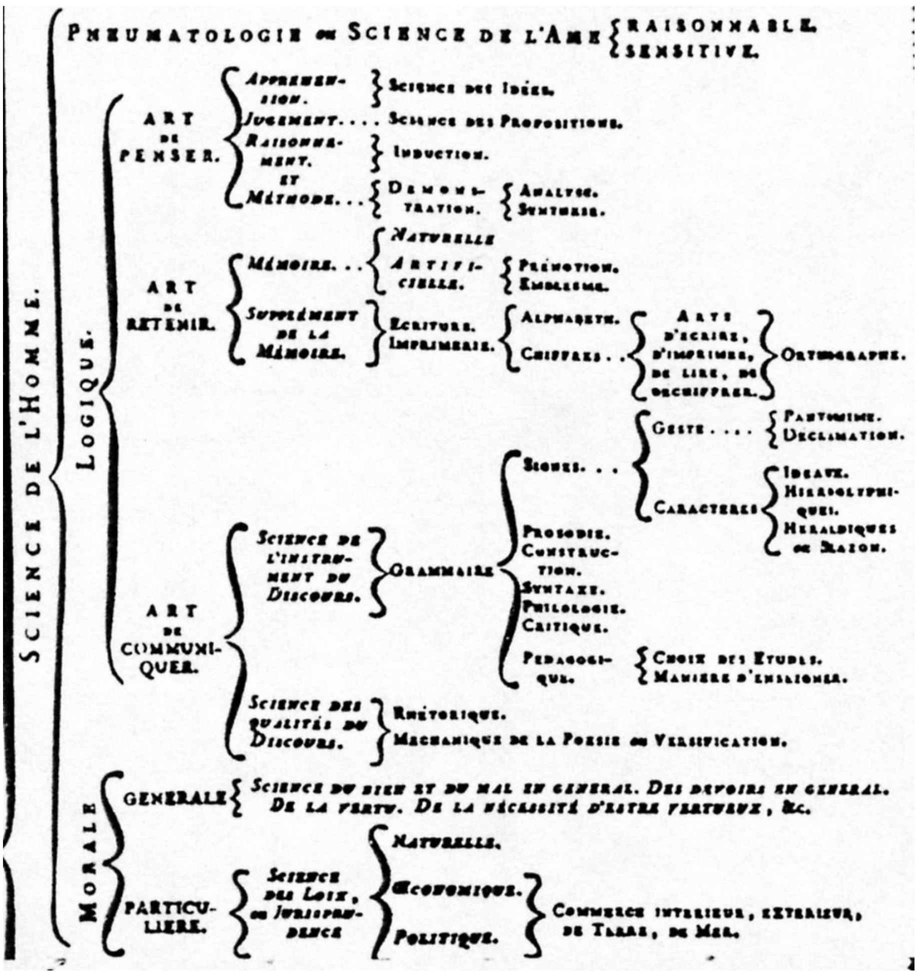



FIG. 47. D. Diderot, Pneumatologie, in *L'Encyclopédie*

Cette méthode que l'on qualifiera de scientifique se constitue d'abord autour des trois méthodes de Galien (*synthesis, analysis, diairesis*) en Italie avec Pietro d'Albano, Tacopo de Forli, Hugo de Sienne, Agustino Nifo, Giacomo Zabarella[40], en France et en Allemagne avec Erasme et Philippe Melanchton. Mais c'est Pierre de La Ramée[41] qui met en cause les trois méthodes de Galien et prône une méthode unique. Néoplatonicien convaincu, fidèle de Pic de la Mirandole et de Ficin, il rejette l'idée qu'il attribue à Aristote, qu'il y aurait deux logiques : une pour les sciences et les savants, une autre pour le discours et le vulgaire. Il sépare la dialectique de la rhétorique. L'*inventio*, la *dispositio* et la *memoria* ne forment qu'une et une seule méthode (la dialectique) qui s'applique à tous les domaines. Pour la rhétorique, il ne retient que deux des cinq *partes artis* traditionnelles[42], l'*actio* et l'*elocutio*.

Cette tripartition de l'omniscience qui repose sur l'universalité des principes, la vraie méthode de l'ordre, la certitude infaillible de la vérité se trouve dans l'idéal encyclopédique chez des auteurs d'inspiration lulliste ou non, comme Heinrich Alsted, Johann Heinrich Bisterfield, Jan Amos Comenius, George Dalgarno, Bernardus Lavinheta, John Wilkins[43], mais aussi autour de la naissance de la méthode chez Bacon, Bodin, Descartes, La Ramée et Leibniz. La *mathesis universalis* devient la science générale de l'ordre[44]. Chez Descartes, les mathématiques servent de référent méthodologique et porte le niveau de certitude à un point tel que le doute n'est plus permis. Comme il subsiste, la seule question qui se pose est de savoir si on peut douter de son propre doute, et donc de sa propre pensée. Inutile d'inventer un malin génie, la méthode cartésienne prend pour objet d'étude la vérité, et non comme Bacon la réalité. Elle privilégie l'intuition et la déduction au détriment de l'induction. A l'inverse, Bacon, Bodin ou La Ramée inventent une méthode inductive qui se fonde sur une fonction de classification de la réalité. Elle s'appuie sur une disposition systématique des notions, des « recueils de lieux » et des « dispositions d'images ». La *taxinomia* devient inséparable de la *mathesis*. Jean Bodin cherche une table qui maintient les trois proportions harmoniques, géométriques et arithmétiques en parfait équilibre,

> « un tableau bien divisé qui établit entre tous ses membres une classification régulière et continue, si bien que leurs liens réciproques et leurs relations harmonieuses peuvent s'embrasser d'un seul coup d'œil qui nous donne le principe de toute la série. Il doit être dressé de façon que les derniers membres soient symétriques des premiers et que les moyens répondent, terme à terme, aux deux extrêmes : on peut ainsi facilement saisir où se trouvent les principes et les conséquences. Cette méthode n'est pas seulement propre à l'enseignement des arts, c'est la règle commune à toutes les sciences. »[45]

La *taxinomia* se loge à l'intérieur de la *mathesis*. En retour, la *mathesis* règle la fonctorialité des tables.

Chez Bacon, l'induction consiste dans l'inspection de trois tables : de présence, d'absence et de degrés. Dans la *table de présence*, une nature étant donnée, Bacon fait « comparaître devant l'entendement toutes les instances connues qui concourent dans cette même nature. »[46] Dans la *table d'absence*, il consigne les

[40] J.H. Randall, "The Development of Scientific Method in the School of Padua", *Journal of the History of Ideas,* I (1), 1940, p. 177-206.

[41] P. de la Ramée, *Dialectique*, 1555.

[42] La rhétorique est communément divisée en cinq parties : invention, disposition, élocution, mémoire et action ou déclamation.

[43] Sur cette question voir Paolo Rossi, *Clavis Universalis.*

[44] M. Foucault, *Les mots et les choses*, p. 86.

[45] J. Bodin, *Tableau du droit universel,* p. 83.

[46] F. Bacon, *Novum Organum*, II, 11.

éléments qui ne se trouvent pas dans cette nature. Dans la *table des degrés*, il note les instances qui varient selon le plus et le moins. La « première vendange » de l'interprétation d'une nature est l'inspection de ces trois tables qui est complétée par l'examen d'aides supplémentaires dont un répertoire de 27 « espèces de faits privilégiés ». Bacon compare cette recherche à l'œuvre de l'alchimiste qui par une série d'opérations (table de présence) extrait pas à pas (table des degrés) une forme pure d'un enchevêtrement de matières, qu'il obtient en la dégageant de ce qui n'est pas elle (table d'absence). L'induction est perçue comme un procédé d'élimination. L'héritage lulliste transparaît dans la façon d'organiser l'espace en tableaux.

Le diagramme est dans cette science générale de l'ordre qui distribue les savoirs un transfuge entre *mathesis* et *taxinomia*, entre tables et méthodes. Il est le reflet de cette disposition des savoirs et du mécanisme de ces tables. Mais le partage entre *mathesis* et *taxinomia* n'est pas aussi évident qu'il y paraît. La table ne peut être établie qu'une fois les règles de constitution posées. Et les tables ne fonctionnent qu'une fois les mécanismes établis. L'ordre n'est pas le seul élément en jeu. L'exemple de Bacon qui donne une lecture tabulaire des propriétés d'une nature selon ses degrés de présence montre que les principes de constitution des tables sont au service du procédé d'élimination qui les fonde. Les *Tables de logique* de Giacomo Zabarella[47] sont comme celles de l'*Encyclopédie* un exemple de ce partage impossible. Chez Zabarella, les tables reprennent les propositions de la logique d'Aristote en le regroupant selon des systèmes d'accolades imbriquées. L'espace stratifié du tableau fonctionne par résonance de cases. La méthode est incluse dans les tables. La seule disposition des éléments détermine déjà leur sens. Tout revient *à penser par les tables*. Le tableau est un diagramme qui se construit par un opérateur d'ordre

Le schématisme kantien entretient une parfaite homologie entre les tables des jugements, des catégories et des principes de l'entendement. Chaque table est formée de quatre titres et se divise en deux parties : une partie mathématique et une partie dynamique. Dans la table des jugements, chaque titre rassemble sous une même classe trois moments : la quantité des jugements (universels, particuliers, singuliers), la qualité (affirmatifs, négatifs, indéfinis), la relation (catégoriques, hypothétiques, disjonctifs) et la modalité (problématiques, assertoriques, apodictiques). Fruit de l'unité analytique, la table des jugements produit par dualité au moyen de l'unité synthétique la table des concepts purs de l'entendement ou catégories. Comme la même fonction préside à l'unité des représentations dans le jugement et à la synthèse des représentations dans l'intuition, les quatre classes sont conservées. La table des catégories a donc quatre titres subdivisés chacun en trois parties. Dans la première classe des catégories, la quantité regroupe trois façons de constituer l'unité à partir d'une diversité (unité, pluralité et totalité). Dans chaque classe, la troisième catégorie est l'union de la deuxième à la première (e.g. la totalité est la pluralité considérée comme unité). La qualité a trois façons de considérer la réception de l'objet dans l'intuition pure (réalité, négation, limitation). Les catégories de la relation représentent les règles pour juger des relations d'existence (substance et accident, cause et effet, et communauté ou action réciproque entre l'agent et le patient). Les catégories de la modalité expriment les valeurs modales des objets de nos jugements (possibilité et impossibilité, existence et non-existence, nécessité et contingence). Les tables des jugements et des catégories se rétractent sur la table des principes de l'entendement qui règlent « l'usage objectif des catégories » et comptent quatre éléments (les *axiomes* de l'intuition, les *anticipations* de la perception, les *analogies* de l'expérience et les *postulats* de la pensée empirique.)

---

[47] Giacomo Zabarella (1533-1589), *Tables de Logique. Sur l'*Introduction *de Porphyre, les* Catégories *et le* De l'interprétation *et les* Premiers analytiques *d'Aristote. Petie synopse introductive à la logique aristotélicienne.* Traduit par Michel Bastit, L'Harmattan, 2003.

Le tableau ne disparaît pas complètement à la fin de l'âge classique. Dans son « *Essai d'un système des éléments basé sur le poids atomique* » publié en 1869, Mendeleïev suppose que les propriétés des corps simples et des combinaisons sont une fonction périodique du poids atomique. D'où l'idée de répartir les 63 éléments connus à cette époque en une table formée de six colonnes. Pour les éléments inconnus, Mendeleïev laisse des cases vides qui seront confirmées plus tard. Il prévoit que trois nouveaux corps auront des propriétés analogues à l'aluminium et au silicium et auront des poids atomiques situés entre 65 et 75. Il leur donne même des noms : l'eka-aluminium, l'éka-bore et l'éka-silicium. Six ans plus tard, Lecoq de Boisbaubran découvre le gallium de numéro atomique 70 (que Mendeleïev appelait l'éka-aluminium). Quatre ans après, Lars Fredrik Nilson découvre le scandium (l'éka-bore) dans le gadolinite et en 1886, Clemens Winkler découvre le germanium (l'éka-silicium). La table se remplit progressivement, mais en 1895, la découverte de deux gaz rares que sont l'hélium et l'argon remet en cause l'édifice. Aucune place n'a été réservée pour ces deux éléments. On ajoute alors une nouvelle colonne pour les gaz rares. Mais bientôt un nouveau coup ébranle la structure avec la découverte des « terres rares ». On place alors tout le groupe des lanthanides (quinze éléments allant du lanthane au luthétium) sur une seule case. Le tableau survécut à toutes les attaques mais ne prit sa forme définitive que très tardivement. En 1973, F. Perrin publie une table de Mendéleïev encore fort éloignée de celle que nous connaissons. La découverte de la chimie quantique et des orbitales du cortège électronique pose de nouveaux problèmes de classification. Si les éléments suivent l'ordre des poids atomiques, ils ne suivent pas celui du remplissage énergétique des couches électroniques. Ces exceptions ont incitées de nombreux chimistes à trouver une nouvelle structure de la table de Mendeleïev[48]. Comme dans la combinatoire lulliste, la table de Mendeleïev repose sur un raisonnement par analogie. Elle est un diagramme d'ordre dont l'opératoire est l'agent classant par poids atomiques, les versions plus récentes de la classification des éléments sont construites sur un autre agent classant qui est le remplissage des orbitales électroniques.

En mathématiques, le tableau ne disparaît pas non plus de l'espace contemporain. Dès que l'on invoque une classification, une zoologie des structures, les tables apparaissent toujours comme l'élément naturel de cette taxinomie, comme si l'ordre des classements était indissociable d'une représentation tabulaire. En retour, le tableau produit des flux, des strates, des points de rebroussement, des lignes de fuite, bref toute une variété de singularités qui structure son espace virtuel. On trouve cette dimension diagrammatique dans la table des $n$-catégories[49]. Non contents d'avoir inventé les catégories, les mathématiciens se sont demandés ce que pouvaient être une généralisation de la notion de catégorie[50]. Il existe aujourd'hui plusieurs définitions des catégories supérieures. La notion a peut-être pour origine les travaux de Max Kelly et de Samuel Eilenberg sur les catégories enrichies (1966), de Jean Bénabou sur les bicatégories (1968) ou ceux de Ronald Brown et de Jean-Louis Loday (1981-1982) sur la recherche de structures classifiant les types

[48]On a dénombré plus de 700 représentations graphiques. Sur cette question, voir Edward Mazurs, *Graphic Representations of the Periodic System During One Hundred Years*, University of Alabama Press, 1974. Dans l'arbre élémentaire (*elementree*) de Fernando Dufour le tronc est composé des éléments de la couche s et des métaux alcalins, les autres éléments des couches p, d et f sont disposés en hexagone autour du tronc. Emil Zmaczynski propose aussi un modèle en arbre. D'autres modèles géométriques ont été proposés : Timmothy Stove et Albert Tarantola proposent des tables fondées sur l'organisation orbitale des électrons, Theodor Benfey donne une version spiralée mettant les éléments de transitions, les terres rares et les actinides en évidence.

[49]Voir Tom Leinster, *Topology and Higher-Dimensional Category Theory : the Rough Idea*, arXiv CT/0106240. John Baez, *Lectures on n-categories and cohomology,* arXiv CT/0608420.

[50]M. Makkai, G ;E. Reyes, *First Order Categorical Logic*, Springer, 1977.

d'homotopie. André Joyal et Ross Street ont proposé la notion de catégorie monoïdale tressée[51]. John Baez et James Dolan[52] s'appuient sur la notion d'opérades, Zouhair Tamsamani[53] sur les $n$-nerfs (qui sont des généralisations de la notion de nerf à une petite catégorie), André Hirschowitz et Carlos Simpson[54] développent la notion de $n$-catégorie de Graeme Segal[55]. En quoi consiste une $n$-catégorie ? Disons que c'est une catégorie dans laquelle on applique récursivement la notion de morphismes entre morphismes. Une $n$-catégorie est une collection de 0-cellules formées de la collection des objets de la $n$-catégorie, de 1-cellules formées de la collection des morphismes, de 2-cellules formées de 2-morphismes, qui sont des morphismes entre morphismes, de 3-cellules formées de 3-morphismes (des morphismes de morphismes entre morphismes), etc. jusqu'aux $n$-cellules et avec des schémas adaptés à la composition de ces $n$-cellules. Le mathématicien cherche à déterminer les structures des catégories supérieures, en particulier de la 2-catégorie, la catégorie des catégories (qui a un sens contrairement à l'ensemble de tous les ensembles).

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | Ensemble | Catégorie | 2-Catégorie | 3-Catégorie |
| 1 | Monoïde | Catégorie monoïdale | 2-Catégorie monoïdale | 3-Catégorie monoïdale |
| 2 | Monoïde commutatif | Catégorie mon. tressée | 2-Catégorie mon. tressée | 3-Catégorie mon. tressée |
| 3 | „ | Catégorie mon. symétrique | 2-Catégorie mon. sylleptique | 3-Catégorie mon. sylleptique |
| 4 | „ | „ | 2-Catégorie mon. symétrique | 3-Catégorie mon. involutive |
| 5 | „ | „ | „ | 3-Catégorie mon. symétrique |

Table périodique des $n$-catégories

Lorsqu'on regarde l'enchevêtrement de ces structures et en particulier les $n$-catégories $k$-monoïdales qui ont seulement $p$-cellules ($p < k$), on s'aperçoit que ces structures déterminent un équivalent mathématique du tableau de Mendeleïev que l'on appelle la *table périodique des n-catégories*. Si on dispose horizontalement les valeurs de $n$ et verticalement les valeurs de $k$, on s'aperçoit qu'il existe un emboîtement naturel de ces structures. La structure de rang $(n, k)$ est une structure de rang $(n+1, k-1)$ n'ayant qu'un objet. Ainsi un monoïde est une catégorie n'ayant qu'un objet. De la même manière, une catégorie monoïdale est une 2-catégorie à un objet. Dans chaque colonne les mêmes objets reviennent inlassablement dès que $k \geq n+2$, exactement comme dans les groupes d'homotopie des sphères $\pi_{k+n}(S^k)$. La table est infinie et se sature dès que la structure atteint un degré de symétrie suffisant faisant écho au théorème de Mac Lane (tous les diagrammes structurels

[51]Ross Street, A. Joyal, Braided monoidal categories, *Macquarie Math Reports 860081* (1986). R. Street, A. Joyal, D. Verity, Traced monoidal categories, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 119 (3) (1996)

[52]J. Baez, J. Dolan, "Higher dimensional algebra III : $n$-categories and the algebra of opetopes", arXiv q-alg/9702014.

[53]Z. Tamsamani, "Sur des notions de n-catégorie et de $n$-groupoïde non stricts via des ensembles multi-simpliciaux", *Journal of K-theory*, 16 (1), Springer, 1999, p. 51-99.

[54]C. Simpson, A. Hirschowitz, *Descente pour les n-champs*, arXiv 9807048.

[55]G. Segal, *Homotopy everything H-space*, in SGA1, Springer et "Categories and cohomology theories", in *Topology* 13 (1974) p. 293-312.

monoïdaux commutent). Sur chaque ligne, les structures sont identiques à dimensions près. L'importance de cette table qui cartographie l'espace catégoriel vient du fait que derrière ces structures il y a les logiques qu'imposent les lieux. Ce que pose la table des $n$-catégories est une présentation de la substance catégorielle autour de ses modes. Chaque mode se répète selon la dimension horizontale du tableau dans une même structure qui ne dépend que de sa dimension propre et se précipite dans sa dimension verticale sur un même élément symétrique. Il n'est pas facile de songer à ce que deviendra l'universel dans les catégories supérieures. S'il reste dans l'orbite unitaire ou s'il se meut avec les dimensions des catégories pour donner naissance à une *pluri-versalité*. Quelle que soit la réponse, ce qu'il faut voir est que les mathématiques posent la question des rapports de l'ontologie et de l'hénologie et affirment avec une force nouvelle dans cette théorie des catégories supérieures l'univocité de l'être.

CHAPITRE 6

# Différence et dualité

Dire que les mathématiques affirment l'univocité de l'être, alors qu'ils font un large usage de la notion de dualité pourrait passer pour paradoxal. En réalité, il n'y a pas de contradiction et ce chapitre va le démontrer. La dualité du monde renvoie à l'apparente adéquation des lois de la nature et des lois propres aux sciences physico-mathématiques. Il ne s'agit pas ici de réintroduire l'ontologie dualiste des particuliers et des universels chère à Russell, mais de comprendre ce que signifie non pas l'Un-multiple, mais l'Un-dual que nous avons entrevu entre l'actuel et le virtuel, l'homologie et la cohomologie. La dualité n'est pas un en-deçà ou un au-delà de la synthèse dialectique. Les concepts qui vont par paires comme puissance et acte, déterminisme et contingence chez Aristote, liberté et nécessité chez Leibniz, expérience et pensée, matière et forme, a priori et a posteriori chez Kant n'ont pas toujours à voir avec la dualité. Il faut distinguer soigneusement les couples en dualité des couples d'opposés ou de contradictoires. Le diagramme, parce qu'il mêle grandeurs intensives et grandeurs extensives, qualité et quantité, positif et négatif, est un fourmillement de dualités de toutes espèces, un point de jonction entre des objets duals. Le zéro est exactement à la jonction des nombres positifs et des nombres négatifs[1]. Il est leur point de bifurcation et leur lieu d'annihilation. Il n'existe pas dans la nature et ne prend son sens qu'en vertu de la dualité physico-mathématique des nombres. C'est aussi parce que le monde est fait de matière et d'antimatière que nous envisageons la dualité comme une gémellité naturelle des choses.

### Identité et dualité

Tous les couples de concepts ne sont pas en dualité. Ce qui distingue opposition et dualité est que la dualité est plus une identité qu'une différence. La dualité est ici débarrassée de ses oripeaux religieux. Il ne s'agit pas de *dualisme*, de la séparation du corps et de l'âme, mais de la dualité découlant de l'Un, d'un objet et de son double différent, fonctionnant de manière identique comme une forme chirale, une main droite et une main gauche[2]. Elle n'est pas uniquement l'expression de formes énantiomorphes, mais définit deux objets hétérogènes égaux ou réciproques, organiquement liés par *différence et identité*. En ce sens, la dualité est l'expression diagrammatique de l'Un-Multiple.

La dualité existe dans le monde qui nous entoure. L'exemple physique le plus commenté est sans doute celui de la dualité ondes-corpuscules, ou celui des particules et des antiparticules, ou encore et pour rester dans le domaine du physico-mathématique celui des forces électrostatiques et gravitationnelles qui ont la même expression formelle et fonctionnelle, autrement dit le même sens diagrammatique. Deux charges électriques (de valeurs algébriques $q$ et $q'$) s'attirent ou se repoussent selon une force inversement proportionnelle au carré de la distance $r$ qui les sépare $Kq \cdot q'/r^2$ de la même manière que du point de vue gravitationnel deux masses ($m$

[1] Cette place du zéro est amplement commentée par G. Châtelet dans *Les Enjeux du mobile.*

[2] Voir aussi A. Lautmann, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, 2007.

et $m'$) s'attirent selon une force elle aussi inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare $Gm \cdot m'/r^2$. Ces deux lois ont la même expression formelle, la même singularité en l'origine, la même expression *unaire* et c'est l'hypothèse actuelle, la même origine cosmologique.

Comprendre l'origine des formes duales est un enjeu important, tant pour la science que pour la philosophie. La phénoménologie a donnée des esquisses de la notion de dualité. Dans l'analyse intentionnelle, elle se manifeste sous des formes duales qui distinguent l'acte de la connaissance visant l'objet (la noèse) et sa représentation (le noème), la forme (acte de l'intentionnalité) et la matière (ce moment réel du vécu), le sujet et le monde. La première réduction phénoménologique vise à mettre en évidence cette dualité, non pas de la conscience comme âme du corps, mais du sujet comme « spectateur de lui-même et du monde », source et origine du sens. La dualité est ce clivage si particulier qu'il ne sépare pas deux choses l'une de l'autre, mais tout en affirmant leur réciprocité mutuelle et leurs différences, révèle leur identité et leur indissociable relation. Elle supprime les attributions existentielles arbitraires, la « valeur d'être » pour mieux révéler le sens du monde débarrassé de notre croyance naïve au monde. Par l'*épochè* phénoménologique, elle débouche sur l'universel « phénomène du monde existant pour moi ». La phénoménologie révèle donc deux aspects que nous extrapolons : le premier que la dualité est l'expression de l'Un-Deux comme cas particulier de l'Un-multiple, le second que la dualité ouvre une série d'invariants qui mène à l'universalité.

La dualité est l'expression de ce que Gilles Châtelet nomme l'*offensive du latéral*. Si l'objectif visé est de mettre à jour des différences, l'action de côté produit une décomposition en un objet et son image duale qui sont en relation de réciprocité forte. Tout se passe comme s'il y avait deux axes : un axe latéral sur lequel se déploient les singularités et différences de l'objet et de son double et un axe frontal qui produit une unilatéralisation de l'objet et donne à toute paire duale une signification unitaire. En dimension finie, l'offensive du latéral est donc l'ouverture duale, le prolongement de l'objet $X$ en son dual $X^*$ et en dimension finie sa clôture involutive $X^{**} = X$. C'est pour cela que l'identité est soumise à la différence, car identité et différence se co-appartiennnent. L'Un unifie la signification du monde et fait de l'objet $X$ et de son dual $X^*$ un objet unique $Y = (X, X^*)$ qui se confond avec son propre dual $Y^* = (X^*, X) = (X, X^*) = Y$ car la dualité se construit sur l'immanence de l'Un.

La dualité ne s'oppose pas au principe de l'identité des indiscernables de Leibniz : « Il n'y a jamais dans la nature deux êtres qui soient parfaitement l'un comme l'autre, et où il ne soit possible de trouver une différence interne ou fondée dans une dénomination intrinsèque.»[3] Leibniz pose que dans le monde physique, deux objets indiscernables sont égaux. L'image d'un objet dans un miroir ne se confond pas avec l'objet initial, car si ces deux objets sont en tous points égaux, on est conduit à affirmer que l'un est dans le monde et l'autre est hors du monde. Si l'image est hors du monde, comment pourrais-je la voir ? Il s'ensuit que, soit l'image d'un objet dans un miroir n'est pas dans la nature, soit l'objet et son image ne sont pas indiscernables. D'où deux attitudes face à la question du réalisme. Soit on admet que l'objet et son image sont en dualité et dans ce cas, l'objet et son dual appartiennent à des mondes différents, soit on considère que l'objet et son image ne sont pas en dualité et on admet implicitement que l'objet et son dual sont dans un même monde. Penser la dualité revient donc à penser l'identité.

La dualité n'est pas sérielle et n'est pas un *mal nécessaire*. Il faut sortir de cette croyance que la dualité serait une réduction binaire de la pensée, justement parce que les opposés ne sont pas toujours des formes duales. On voit bien dans le

[3] G. Leibniz, *Monadologie*, article 9.

passage suivant que le dualisme n'est pas compris chez Deleuze comme la dualité des mathématiciens.

> « Nous n'invoquons un dualisme que pour en récuser un autre. Nous ne nous servons d'un dualisme de modèles que pour atteindre à un processus qui récuserait tout modèle. Il faut à chaque fois des correcteurs cérébraux qui défont les dualismes que nous n'avons pas voulu faire, par lesquels nous passons. Arriver à la formule magique que nous cherchons tous Pluralisme = Monisme, en passant par tous les dualismes qui sont l'ennemi, mais l'ennemi tout à fait nécessaire, le meuble que nous ne cessons pas de déplacer.»[4]

Si la dualité est pensée non comme un objet (un meuble), mais comme un opérateur $X \longrightarrow X^*$ qui associe un objet à son dual et qui n'est pas le contraire de cet objet $X$, alors on voit que la dualité n'est pas un procédé démonstratif qui permettrait en avançant pas à pas de faire de l'inférence logique par juxtaposition de formes duales. Cette dualité nouvelle n'est pas l'ancienne *coïncidence des opposés.*

La dualité interroge cependant le statut de l'objet[5]. Car l'objet ne peut être objet qu'en tant qu'objet de connaissance. Par conséquent, il ne peut exister d'objet sans sujet, ni de sujet sans objet. Cette réciprocité est l'expression duale du couple objet-sujet qui est une seule et même entité, indissociable, unitaire et double à la fois. C'est nous l'avons vu, le statut catégoriel donné par le lemme de Yoneda qui exprime la dualité intrinsèque de tout objet.

Dire que l'être dépend du connaître et que le connaître fait partie de l'être conduit à une singularité. Si "l'être de la table" dépend du "connaître de la table" paraît une évidence, "l'être du connaître" qui est la connaissance elle-même dépend du "connaître du connaître". Ce qui conduit à une régression infinie : la connaissance dépend de la connaissance de la connaissance qui elle-même dépend de la connaissance de la connaissance de la connaissance... La connaissance est donc impossible. Pour sortir de cette régression infinie, il faut scinder l'être en être et connaître et opter pour une ontologie dualiste.

La dualité se distingue de l'analogie. Cette dernière intervient dans la formation de concepts scientifiques et c'est ce qui lui confère son importance dans la théorie de la connaissance. En établissant un rapport entre l'inconnaissable et le connu, l'analogie met curieusement en équation la connaissance qui ne peut plus ignorer de territoires inconnus, rationnellement équipollés et par conséquent résolubles. Tout s'ordonne dans des rapports mathématiques et la combinatoire devient l'instrument qui permet de dérouler les mécanismes rationnels qui conduiront à la solution du problème. On interprète l'analogie chez Aristote selon deux types : l'*analogie d'attribution* et l'*analogie de proportionnalité.* L'analogie d'attribution est responsable du classement des similitudes entre groupes qui selon les différences constituent les critères de classement catégoriels. L'analogie de proportionnalité établit un équilibre entre des rapports : l'œil est à la vision, ce que l'oreille est à l'audition ; l'aile est à l'oiseau ce que la nageoire est au poisson ; la plume est à l'oiseau, ce que l'écaille est au poisson. Dans le carré apuléen, les rapports des quatre éléments suivent la règle de proportionnalité : le feu est à l'air ce que l'air est à l'eau et l'eau à la terre.

Dans les sciences naturelles, l'analogie est souvent comprise comme une dualité entre le macrocosme et le microcosme, le principe qui permet le passage d'un monde à son revers. Descartes assimile le fonctionnement du corps humain à celui d'une

---

[4] G. Deleuze, *Mille plateaux*, p. 31.

[5] R. Guitart, *L'évidement des objets et le dehors comme substance*, Colloque ENS sur le lemme de Yoneda, Paris, 18 juin 2007. Sur la question des dualités comme fondation du mathématico-physique, voir aussi R. Guitart, "La courbure de la raison", *Les conférences du perroquet*, 31 (1991) p. 3-41.

machine. Le système circulatoire est un système hydraulique, les vaisseaux sanguins sont des tuyaux et les valvules représentent des soupapes. Au fil des ans et dans le domaine des sciences du vivant, il y aurait eu trois âges de l'analogie, soit par ordre chronologique : la comparaison, la similitude et l'homologie. Le terme homologie qui a été introduit par Owen en 1843 désigne des organes d'origine identique mais de fonction différente, alors que l'analogie désigne des éléments d'origines différentes et de fonctions semblables, comme l'aile de l'oiseau et l'aile de l'insecte. Etienne Geoffroy de Saint Hilaire considère la théorie des analogues comme une méthode qui conduit à démontrer l'unité de composition à l'intérieur de différents ordres. Il appelle analogue ce qu'aujourd'hui nous appelons homologue. Il est sans doute le premier à avoir distingué les notions d'analogie et d'homologie bien que les termes ne furent inventés que quelques années plus tard par Richard Owen[6]. L'homologie est définie selon le principe des connexions. Un organe est homologue pour différentes espèces s'il est lié par les mêmes connexions. L'os du bras a les mêmes connexions pour une taupe que pour un oiseau, mais leurs fonctions sont différentes. L'humérus de la taupe lui sert à creuser la terre alors qu'il sert à voler chez l'oiseau.

Réduite à la proportion mathématique, l'analogie renoue avec le pythagorisme pour lequel les vérités fondamentales sont des vérités de calcul. L'analogie est une similitude de rapports. L'*analogia,* c'est étymologiquement l'*ana logon* ce qui est dans le même rapport, et qui trouve son équivalent dans le latin *proportio.* L'analogie du Même et de l'Autre est à la base du mythe cosmogonique tel que le rapporte Platon. Chez Aristote, l'analogie est essentiellement fonctionnelle. Pour le Pseudo-Denys, l'analogie est un « degré de participation aux perfections divines. » C'est aussi une forme sérielle lorsqu'elle met en relation des éléments qui entrent dans une chaîne causale comme feuille-fleur-fruit ou pluie-neige-grêle. Pour Thomas d'Aquin, l'analogie régit la relation entre l'infini et le fini : elle est l'instrument de passage du divin à l'homme. Elle se construit à travers les mots sur la base d'une relation entre différence et identité. « En ce qui concerne les notions dites analogiquement, un même nom est attribué à divers sujets selon une raison partiellement la même et partiellement différente : différente par les divers modes de la relation ; la même par ce à quoi se rapporte la relation. »[7]

### Principe de dualité

La dualité se manifeste par l'échangeabilité d'objets mathématiques qui vont par paires mais qui ne sont pas nécessairement l'opposé ou la négation logique l'un de l'autre. Par dualité, la valeur de certains invariants permet de déduire celle des autres. Le principe de dualité a différentes expressions selon le domaine des mathématiques dans lesquel il opère. Il consiste à remplacer dans une proposition vraie toutes les occurences de certains concepts par les concepts duals pour former une proposition qui est appelée la *proposition duale.* Le principe de dualité affirme alors que la proposition duale reste vraie. La dualité permet donc de transférer des invariants mathématiques d'un espace à son dual. C'est le caractère fonctoriel de la dualité.

Donnons quelques exemples de ce principe de dualité[8]. Le théorème de Brianchon[9] affirme que dans tout hexagone circonscrit autour d'une courbe fermée de

---

[6]Owen distingue trois types d'homologie : l'homologie générale associée à un référent général appelé archétype, l'homologie spéciale référençant un type commun et l'homologie sérielle. Owen Richard, *Principes d'ostéologie comparée ou Recherche sur l'Archétype et les Homologies du squelette vertébré*, 1855, Paris, J.-B. Baillière, p. 29-30.

[7]Thomas d'Aquin, *Commentaire à la métaphysique d'Aristote*, I.XL, 1.3, no. 2197.

[8]On trouvera d'autres exemples dans le livre de N. Efimov, *Géométrie supérieure*, 1981.

[9]Charles-Julien Brianchon, "Recherches sur la determinations d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données", *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1806.

degré deux (une conique), les médianes qui relient les sommets opposés se croisent un point unique. En géométrie projective, ce théorème est dual du théorème de Pascal qui affirme que les cotés opposés d'un hexagone inscrit dans une courbe fermée de degré deux se croisent en trois points situés sur une même droite. La dualité repose sur le fait que dans le plan projectif, un point est dual à une droite et que les côtés de l'hexagone sont assimilés aux tangentes de la conique qui sont duales aux points caractéristiques d'un fibré. En géométrie elliptique, deux triangles de même type topologique sont congruents si chaque côté de l'un est égal à un côté de l'autre ou de manière duale si chaque angle de l'un est égal à un angle de l'autre. Dans ce dernier exemple, les objets *côtés* et *angles* sont duals.

Pour le calcul propositionnel et la logique des prédicats, le principe de dualité pose que si une formule $\varphi$ entraîne une formule $\psi$ est une implication vraie ($\varphi \Rightarrow \psi$), alors la formule duale $\psi^*$ entraîne la formule $\varphi^*$ est aussi une implication vraie ($\psi^* \Rightarrow \varphi^*$). Dans ce principe, les formules sont supposées ne pas contenir le signe d'implication. La formule duale $\varphi^*$ s'obtient en remplaçant dans la formule $\varphi$ chaque symbole par son symbole dual : *et* ($\wedge$) est remplacé par *ou* ($\vee$), *ou* ($\vee$) est remplacé par *et* ($\wedge$), *quelque soit* ($\forall$) est remplacé par *il existe* ($\exists$) et *il existe* ($\exists$) est remplacé par *quelque soit* ($\forall$). Par exemple, les formules $\varphi = \neg A \wedge \neg B$, et $\psi = \neg(A \vee B)$ ont pour expressions duales $\varphi^* = \neg A \vee \neg B$ et $\psi^* = \neg(A \wedge B)$. Le principe de dualité affirme que si l'implication

$$\neg A \wedge \neg B \implies \neg(A \vee B)$$

est vraie, alors l'implication duale

$$\neg(A \wedge B) \implies \neg A \vee \neg B$$

est aussi vraie. Comme le même principe s'applique aux formules $\varphi^*$ et $\psi^*$, on en déduit l'équivalence de ces deux implications. Cela se vérifie en construisant les tables de vérité. La dualité d'une formule ne peut s'étendre au-delà d'une itération : le dual du dual (le *bidual*) d'un objet est l'objet d'origine, ce que le mathématicien traduit en disant que la dualité est une involution.

L'objet n'est pas séparable de l'opératoire où il s'inscrit. C'est ce qui conduit Granger à poser un principe de dualité qui est différent de celui que nous allons voir :

> « Il nous semble que les différents points de vue sur l'existence des objets de pensée puissent être interprétés au moyen d'une thèse générale que nous proposons ici sous le nom de *principe de dualité*. Elle consiste à observer que *toute pensée d'objet* est corrélative de la pensée, plus ou moins explicite quoique toujours effective, d'un système d'*opérations* qui détermine ces objets. »[10]

Cette dualité a pour origine la « relativité inéluctable entre la fonction formelle et la fonction matérielle du concept. »[11] Elle dépend à la fois de l'idée phénoménologique que toute pensée est pensée d'objets et du lemme de Yoneda qui assimile l'identité de deux objets à l'identité des points de vue sur ces objets et donc à l'opératoire qui lui est associée. Par conséquent, si l'objet est assimilable à son opératoire, le principe de dualité énonce simplement que des espaces d'objets sont en dualité avec d'autres espaces d'objets. Il ne dit pas sous quelles conditions cette dualité s'introduit. La distinction d'objets de croyance ou d'objets de connaissance ne résout pas le problème, car la croyance comme le connaître sont des opérateurs intégrés à l'objet. Il n'y a donc pas lieu de faire cette distinction entre objets. Pour les espaces vectoriels, Granger considère que les espaces d'objets et les espaces

[10] G.-G. Granger, Article *Objet*, in *Encyclopaedia Universalis*, 1990, p. 670-674.

[11] G.-G. Granger, *Formes, opérations objets*, p. 39.

d'opérations sont réciproques l'un de l'autre. Un espace vectoriel a pour objet des vecteurs. Son dual est un espace de formes linéaires qui opèrent sur cet espace. Mais ces formes linéaires sont simplement les tangentes de l'espace. On a donc d'un côté un espace d'objets constitué de vecteurs et de l'autre, un espace également d'objets constitué de tangentes. Ce qui ramène au sens propre à la différence. Entre vecteurs et tangentes s'insère la différentiation.

La question de l'origine de la dualité se pose de nouveau en relation avec la différence, puisque ce qui différencie un objet et son objet dual n'est que leur différence. Mais cette différence est particulière en ce sens qu'elle n'opère qu'une fois et qu'en dimension quelconque le dual algébrique d'un espace est toujours inclus dans son bidual. C'est le caractère involutif qui soulève la question de savoir si toute involution est une dualité potentielle ?

Le lemme de Yoneda contredit l'idée que le rapport entre forme (opération) et contenu (objets) est une dualité fondamentale, car dans ce plongement, il a toujours beaucoup plus de foncteurs que d'objets. Cavaillès voyait plus justement dans ce rapport une dialectique et non une dualité. Le lemme de Yoneda s'oppose à l'idée que le découpage entre contraintes opératoires et objectales est équivalent au découpage entre contraintes syntaxiques et contraintes sémantiques, car il plonge les objets dans une catégorie fonctorielle oubliant la structure de leur langue d'origine. Voici un exemple mathématique[12] qui montre que la notion de dualité conduit à une mise en équations.

L'espace dual d'un espace vectoriel $X$ est l'ensemble des formes linéaires sur $X$. En dimension finie, l'espace dual $X^*$ est isomorphe à $X$. Une application simple de la notion de dualité montre que l'on peut toujours représenter un sous-espace vectoriel de dimension $r$ ($r < n$) $X$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ par un système de $(n-r)$ équations. Il existe en effet $(n-r)$ formes linéaires indépendantes $\phi_1, ...\phi_{n-r}$ du dual de $X$ telles que $X$ soit l'intersection des hyperplans $\ker(\phi_j)$

$$X = \bigcap_{j=1}^{n-r} \ker(\phi_j)$$

Le sous-espace vectoriel $X$ est donc représenté par une série d'équations

$$x \in X \Longleftrightarrow \phi_1(x) = 0, ..., \phi_{n-r}(x) = 0$$

Ce résultat généralise des résultats élémentaires comme celui-ci : dans un espace vectoriel tridimensionnel, l'intersection de deux plans indépendants est une droite. C'est une conséquence de la notion de la dualité que de montrer qu'une structure mathématique abstraite peut être mise en équations.

### Diagrammes et catégories duals

L'objet et son dual sont étroitement liés et se supposent l'un l'autre. Il y a interdépendance de l'objet et de son dual. L'objet est nécessaire pour que le dual soit intelligible et produise ses effets. Inversement, le dual est nécessaire pour que l'objet prenne son entière signification. Nous connaissons de nombreux objets mathématiques en relation de dualité, des sommes et des produits, des limites inductives et projectives, des foncteurs lisses et propres. Une catégorie mathématique, définie par ses objets et ses morphismes, a une catégorie duale qui est obtenue de manière particulièrement simple en renversant le sens des morphismes, c'est-à-dire en transformant les buts en sources et les sources en buts. Un graphe a aussi une forme

[12] Voir aussi le texte de R. Guitart, “Toute théorie est algébrique”, *Journée mathématique en l'honneur d'Albert Burroni : Catégories, théories algébriques et informatique*, le Vendredi 20 septembre 2002, à l'Université Paris 7, Institut de mathématique de Jussieu, Prépublication 368, Avril 2004, p. 79-102.

duale. Dans un graphe planaire, composé de sommets et d'arêtes reliant ces sommets, les arêtes délimitent les faces de ce graphe. En plaçant un point au centre de chaque face et en reliant ces points entre eux on détermine un graphe dérivé du premier qui est appelé le *graphe dual*. Cette notion se généralise au cas des polyèdres. Le polyèdre dual est obtenu en reliant les centres des faces adjacentes. Ainsi, le tétraèdre est son propre dual, le cube est dual de l'octaèdre et le dodécaèdre est dual de l'icosaèdre. Cette dualité garantit que les invariants de l'un sont aussi des invariants (pour éventuellement d'autres valeurs) de l'objet dual. Dans les formes duales, le diagramme et le codiagramme font écho à la façon de concevoir un graphe dual. En pratique, la dualité est un puissant outil démonstratif. Elle sert à classer les objets et à améliorer la compréhension que nous en avons. Souvent, les objets ne sont pas comparables et il n'existe pas de classement explicite canonique. C'est l'espace dual lui-même qui permet de faire cette classification. Le procédé est simple : au lieu de classer les objets (ce qu'on ne sait pas faire), on classe les objets de l'espace dual. On en déduit alors une classification des objets d'origine.

Pour que la notion de dualité fonctionne c'est-à-dire pour qu'elle produise des co-vérités, il faut que le principe de dualité s'applique, qu'une certaine fonctorialité permette de transporter des vérités d'un objet à son dual. Tous les couples conceptuels ne sont pas toujours en dualité. C'est souvent un problème difficile de savoir si un couple est dual. Prenons par exemple le couple discret-continu. Ce couple est-il dual ? Si on regarde la résolution d'équations différentielles et leurs discrétisations, alors tout laisse à penser que par analogie de traitement ce couple est dual. Mais ce traitement ne fonctionne que parce que les valeurs réelles sont limites de valeurs discrètes. Autrement dit, c'est une propriété de densité des nombres qui est en jeu et non une affaire de dualité. D'ailleurs la construction des nombres réels se fait par densité. L'ensemble des nombres réels se construit comme limite de nombres rationnels, qui eux-mêmes dérivent des nombres entiers naturels. Il est vrai que l'on traite de la même manière par transformée de Fourier une équation de récurrence discrète et une équation différentielle. Mais ce qui justifie l'introduction de cette transformée est que dans les deux cas nous avons la même notion de mesure et la même théorie. C'est la dualité de la transformée de Fourier qui importe ici, non la distinction des structures continues ou discrètes. Pour des raisons identiques, le couple déterministe-probabiliste n'est pas un couple dual, puisque tout espace de probabilité est un cas particulier d'espace mesuré. La probabilité n'est qu'une mesure finie. Par contre, des couples comme la qualité et la quantité, l'imaginaire et le symbolique sont des formes duales. Le couple intensif-extensif ou intensionnalité-extensionalité a un prolongement ou une résonance duale dans le couple torsion-extension que l'on trouve en géométrie algébrique. Si des objets mathématiques ou des objets de mon univers sont en dualité, alors se pose la question de savoir quel est le dual de l'Être ? L'Être lui-même, l'événement (Badiou), le néant (Sartre), le Non-Être, l'Un ? Si un objet n'a pas d'existence en soi, mais qu'il existe par le lemme de Yoneda sous forme fonctorielle, comme foncteur sur la catégorie des ensembles (comme par exemple le produit de deux schémas), alors on ne peut pas dire qu'il *est*, mais qu'il *co-est*. Du point de la dualité, la question de l'Être se dédouble alors en *Être ou co-Être*.

Dans la modélisation des systèmes, l'analyse et la synthèse sont deux processus formels en relation de réciprocité. La distinction entre des *vérités analytiques* qui sont vraies dans tous les mondes possibles et qui sont vérifiables sans recourir à l'expérience et des *vérités synthétiques* qui sont vraies dans un monde possible, connaissables a posteriori et vérifiables par l'expérience se fonde sur une relation logique entre universels (dans tous les mondes) et particuliers (pour un monde) et n'envisage pas leur dualité. Comme il existe des propositions indécidables qui ne sont ni vraies, ni fausses, il existe des vérités qui ne sont ni analytiques, ni synthétiques, simplement parce que l'expérience est possible, mais leur vérification est impossible, car elle suppose que cette expérience soit répétée un nombre infini de fois. C'est le cas par exemple d'une expérience portant sur tous les atomes de l'univers. Analyse et synthèse ne sont donc pas deux processus en dualité, même lorsqu'ils servent de fondement linguistique au rapport entre la syntaxe (modèles synthétiques) et la sémantique (modèles analytiques). Le processus dialectique qui les unit leur confère un mouvement dans lequel ne peut jouer le principe de dualité. Une opération analytique ne fonctionne pas comme une opération synthétique, parce que l'une précède nécessairement l'autre, et que de ce fait, elles sont marqués par l'irréversibilité temporelle.

Observons encore qu'on ne peut pas construire une philosophie sur la théorie des ensembles. C'est ce que montre la dualité des morphismes d'ensembles. Dans la catégorie des ensembles, les monomorphismes sont les injections et les épimorphismes sont les surjections. Un morphisme est un monomorphisme si et seulement si c'est un épimorphisme dans la catégorie duale. Les isomorphismes entre deux ensembles sont les applications bijectives, à la fois surjectives et injectives. Dans la catégorie des ensembles, une flèche est un isomorphisme si et seulement si elle est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme. Cette caractérisation des isomorphismes ne se généralisent pas à toutes les catégories. Dans la catégorie des espaces topologiques, un morphisme peut être à la fois un monomorphisme et un épimorphisme sans être pour autant un isomorphisme. Les isomorphismes sont des homéomorphismes : en plus de la bijectivité, ils transportent la continuité. Or il existe des fonctions bijectives qui ne sont pas des homéomorphismes. C'est le cas de l'identité sur un ensemble muni de deux topologies différentes, l'une étant moins fine que l'autre. Les raisonnements qui s'appuient sur la seule catégorie des ensembles ne sont pas suffisamment généraux pour fonder une ontologie.

Dans la deuxième moitié du XX^e siècle, la notion de dualité a eu d'importantes conséquences pour le développement de la géométrie algébrique et de l'algèbre topologique. Dès 1922, Alexander a montré que le $p$-ième nombre de Betti modulo 2 d'un polyèdre fini $A$ dans un espace sphérique $X$ de dimension $n$ est égal au $(n-p-1)$-ième nombre de Betti modulo 2 de $X \backslash A$. Ce résultat que l'on appelle la dualité d'Alexander est un cas particulier de la dualité de Kolmogorov ou de la dualité de Pontryagin qui établit un isomorphisme entre les groupes d'homologie

$$H_p(A, G) \simeq H_{n-p-1}(X \backslash A, \widehat{G})$$

Cinq ans après le résultat d'Alexander, Lefschetz[13] a établi la dualité entre espaces d'homologie et espaces de cohomologie. La dualité de Poincaré généralise les travaux de Lefschetz, le théorème de Pontryagin et la dualité de Steenrod. Peu après, Jean-Pierre Serre étend ces résultats à une variété algébrique $X$ non singulière de dimension $n$. La dualité de Serre s'énonce sous cette forme : si $\mathcal{L}$ désigne un faisceau localement libre sur $X$, $\mathcal{L}^*$ le faisceau dual et $\omega$ le faisceau des germes des formes différentielles de degré $n$, alors les espaces vectoriels de cohomologie sont duals

$$H^p(X, \mathcal{L}) \simeq H^{n-p}(X, \mathcal{L}^* \otimes \omega)$$

L'histoire des mathématiques montre que ces résultats n'ont cessé de se généraliser. La notion de dualité a joué un rôle central chez Grothendieck dans le développement des catégories dérivées et du formalisme des six opérations qui se met en place au début des années 60[14].

[13] S. Lefschetz, "Manifolds with a boundary and their transfrmations", *Trans. Amer. Math. Soc.* 29 (1927) 429-462.

[14] « La découverte progressive de ce formalisme de dualité et de son ubiquité s'est faite par une réflexion solitaire, obstinée et exigeante, qui s'est poursuivie entre les années 1956 et 1963. C'est au cours de cette réflexion que se sont dégagées progressivement la notion de catégorie

> « Un premier pas vers une compréhension de la dualité en cohomologie a été la découverte progressive du formalisme des six variances dans un premier cas important, celui des schémas nothériens et des complexes de modules à cohomologie cohérente. Un deuxième a été la découverte (dans le contexte de la cohomologie étale des schémas) que ce formalisme s'appliquait également pour des coefficients discrets. Ces deux cas extrêmes étaient suffisants pour fonder la conviction de l'*ubiquité* de ce formalisme dans toutes les situations géométriques donnant lieu à une "dualité" de type Poincaré – conviction qui a été confirmée (entre autres) par les travaux de Verdier, Ramis et Ruget. Elle ne manquera pas de se confirmer pour les types de coefficients, quand le *blocage* qui pendant quinze ans s'est exercé à l'encontre du développement et d'une utilisation de grande envergure de ce formalisme se sera effrité. »[15]

Grothendieck souligne l'ubiquité du formalisme et de la dualité qui lui est associée. Ce qui différencie le dual mathématique de la simple dyade est que dès qu'on approche un couple d'objets pour mieux l'appréhender il se transforme instantanément en un seul objet. La dualité se fait identité et c'est cela qui lui assure son caractère d'ubiquité. Être à la fois une différence et une unité, c'est sa relation à l'Un, son immanence qui fonde son ubiquité. La dualité est primitive et originaire. Elle ne concerne pas un couple d'objets pris plus ou moins arbitrairement, elle est inscrite au plus profond de l'univers. Ce n'est pas un système d'éléments qui se clôture sur lui-même, c'est un plan ouvert irréversible. Si la dualité mathématique a un équivalent philosophique, ce n'est certainement pas le dualisme religieux. La dualité n'a pas été oubliée par la philosophie, ni refoulée. Elle est inscrite dans le mythe de fondation du *Timée* entre le Même et l'Autre.

## Dualité et fonctorialité

La dualité n'est pas la simple confrontation d'un objet et de son opposé, du clos et de l'ouvert. Pour qu'il y ait dualité, il faut qu'une propriété de l'objet se retrouve dans le dual. C'est ce transfert d'une vérité à une co-vérité, qui garantit le fonctionnement de la dualité. Lorsque cette dualité peut se formaliser dans un cadre catégoriel, alors le transfert devient fonctoriel puisqu'il opère entre catégories. Les formes dyadiques de l'Un et du Multiple ne reçoivent pas leur déconstruction de la seule théorie des ensembles, mais plutôt de la description fonctorielle ou duale de ces objets.

En mécanique, on passe des équations de Hamilton aux équations de Lagrange par la transformée de Legendre. En général, cette transformation de Legendre n'est pas un homomorphisme du fibré tangent sur le fibré cotangent. Mais lorsque la transformée de Legendre est un difféomorphisme alors les formulations lagrangiennes et hamiltoniennes sont équivalentes. En analyse convexe, la transformée de Legendre prend le nom de transformée de Fenchel-Young. Si $X$ et $Y$ sont deux espaces vectoriels réels munis d'une forme bilinéaire $\langle x, y\rangle$ une fonction $f$ de $X$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ a une fonction conjuguée convexe

$$f^*(y) = \sup_{x\in X} (\langle x, y\rangle - f(x))$$

dérivée et une compréhension du rôle qui lui revenait en algèbre homologique. » A. Grothendieck, *Récoltes et semailles II,* p. 177.

[15] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles II,* Note $^{46}2$, p. 186-187. Sur la dualité locale dans le Séminaire de Géométrie algébrique, voir SGA2 Exposés IV, V et XII. Sur la dualité de Poincaré, voir P. Deligne, "La formule de dualité globale", SGA 4, Tome 3, Exposé XVIII.

L'application qui a $f$ associe la fonction conjuguée $f^*$ est la transformée de Fenchel qui s'appelle dans le cas réel ($X = Y = \mathbb{R}^n$) transformée de Legendre. Une fonction de Young sur $\mathbb{R}$ est une fonction $f$ convexe non décroissante qui s'annule à l'origine et telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/x = +\infty$. La fonction conjuguée d'une fonction de Young est une fonction de Young. Ces fonctions servent à définir les espaces d'Orlicz et a étudié leur dualité. La fonction $f(x) = x^p/p$ $(1 < p < \infty)$ est une fonction de Young qui a pour conjuguée la fonction $f^*(y) = y^q/q$. Les quantités $p$ et $q$ sont reliées entre elles par la relation de conjugaison

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On retrouve cette relation dans la dualité des espaces de Lebesgue. L'espace de Lebesgue $L^p$ est l'espace des classes de fonctions intégrables pour la norme définie par la formule

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

L'espace de Lebesgue $L^p$ a pour dual l'espace $L^q$ lorsque $p$ et $q$ vérifient la relation de conjugaison. Cette dualité se conserve lorsqu'on étend la relation au cas où $p$ ou $q$ est infini ou plus petit que 1 $(0 < p, q \leq \infty)$. Toutes ces considérations sont liées à une même dualité. C'est encore cette dualité qui fonde la transformée de Fourier, qui permet de considérer de manière équivalente des longueurs ou des fréquences, des fonctions ou leurs transformées de Fourier qui dépasse le caractère périodique du phénomène d'origine et transforme un produit de convolution en un produit simple. Si $G$ est un groupe fini, on appelle *représentation* de ce groupe sur le corps des nombres complexes la donnée d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension fini et d'un homomorphisme $\rho$ de $G$ dans le groupe $GL(G)$ des transformations linéaires inversibles de $G$. Le *caractère*[16] $\chi$ d'un élément de $G$ est la trace d'une représentation de cet élément

$$\chi(g) = tr(\rho(g))$$

La plupart des résultats de la représentation des groupes finis s'étendent à certains groupes infinis comme les groupes compacts ou les groupes abéliens localement compacts. La généralisation de la transformée de Fourier se fonde sur le théorème de dualité de Pontryagin[17] qui montre que l'ensemble des caractères d'un groupe abélien localement compact $G$ est un groupe abélien, appelé le dual de $G$ et noté $\widehat{G}$. Cette dualité induit une dualité diagrammatique sur les réseaux des sous-groupes $G$ à travers la correspondance $A \to A^\perp$ où $A^\perp$ est l'ensemble des caractères de $G$ qui se réduisent à l'unité sur un sous-groupe $A$ de $G$

$$A^\perp = \{\chi \in \widehat{G},\ \chi(a) = 1,\ \forall a \in A\}$$

Si $f$ est un élément de $L^1(G)$, on définit sur $\widehat{G}$ une fonction $\mathcal{F}f$ appelée la transformée de Fourier par la formule

$$\mathcal{F}f(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)} \, d\mu(x)$$

Lorsque $G$ est le groupe $\mathbb{R}^n$, on retrouve la définition usuelle avec pour caractère $\chi_a(x) = e^{ia\cdot x}$. Sur le tore $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, les caractères continus sont de la forme $x \to e^{inx}$ pour $n$ entier relatif. On retrouve dans ce cas la définition usuelle des séries de Fourier. Dans le cas général, la transformée de Fourier transporte l'algèbre

[16]Pour plus de détails voir par exemple J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1967.

[17]L.S. Prontryagin, "The theory of topological commutative groups", *Ann. of Math.* 35 (1934), p. 361-268.

de convolution $L^1(G)$ en une algèbre multiplicative $L^\infty(\widehat{G})$ et réciproquement par transformée inverse.

$$L^1(G) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} L^\infty(\widehat{G})$$

En généralisant en 1938, le théorème de dualité à des groupes compacts non commutatifs, Tanaka[18] montre qu'il est possible de reconstruire le groupe $G$ à partir de ses représentations irréductibles[19]. Pour la première fois, il introduit une correspondance entre un groupe et la catégorie de ses représentations. C'est à partir de ces travaux que s'établit le caractère fonctoriel de la dualité de Tanaka-Krein. En cherchant à résoudre les conjectures de Weil, Grothendieck comprend que cette dualité peut être renversée. Il introduit la catégorie des motifs et un foncteur fibré vers les espaces vectoriels. Il conjecture que la catégorie des motifs se construit par la catégorie des représentations du groupe que l'on appelle aujourd'hui le *groupe de Grothendieck-Galois* et qui est une extension du groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$.

La dualité a une expression machinique qui est la fonctorialité. C'est parce que le groupe $G$ et son ensemble de caractères $\widehat{G}$ sont en relation de dualité que l'on peut envisager de construire une transformée de Fourier entre un espace de fonctions intégrables $L^1(G)$ et l'espace $L^\infty(\widehat{G})$. Le diagramme entre ces quatre espaces ($G$, $\widehat{G}$, $L^1(G)$, $L^\infty(\widehat{G})$) est un carré qui relie la dualité de Pontryagin à la dualité de Tanaka-Krein. Au reste, si on considére le groupe $G$ comme un objet alors le groupe dual $\widehat{G}$ qui est l'ensemble des caractères de $G$ s'interprète comme l'ensemble des points de vue sur $G$. L'identité entre $G$ et son dual est en quelque sorte une identité entre objets et foncteurs. Dans d'autres contextes, c'est ce que Langlands appelle le *principe de fonctorialité* qui montre que s'il existe un $L$-homomorphisme entre les groupes duals ${}^LH$ et ${}^LG$ alors il existe un transfert des représentations admissibles de $H$ vers les représentations admissibles de $G$[20].

### Quantification et déformation

La fonctorialité ne concerne pas les seules mathématiques. Au début de ce chapitre nous avons parlé de la correspondance entre mécanique lagrangienne et mécanique hamiltonienne, deux formalismes mathématiques pour décrire une même réalité physique. Lorsqu'on passe de la mécanique classique à la mécanique quantique, les problèmes deviennent beaucoup plus difficiles. Il existe cependant plusieurs approches de la quantification. Un système classique est décrit par une variété symplectique $(M, \omega)$ où $M$ est une variété différentielle de dimension $2n$ correspondant à l'espace des phases et $\omega$ la forme symplectique (une 2-forme fermée non dégénérée). La quantification est une procédure qui consiste à associer à chaque variété

[18] T. Tanaka, Über den Dualitätsatz der nichtkommutativen toplogischen Gruppen, *Tôhoku Math. Journal*, 45, 1938, p. 1-12. Ce résultat a été étendu par M.G. Krein, puis par W.F. Stinespring aux cas des groupes localement compact unimodulaires (Integration theorems for gauges and duality for unimodular locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 90, 1959, p.15-56), et par P. Eymard aux cas localement compacts (même non unimodulaires) in (P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, 92, 1964, p. 181-236). On a cherché à étendre la dualité de Tanaka-Krein à des structures mathématiques autres que les groupes, comme les algèbres d'opérateurs (en particulier, les algèbres de von Neumann), les algèbres de Kac et les groupes quantiques. En relation avec les problèmes de physique mathématique, S. Majid a montré que cette dualité s'étend aux algèbres quasi-Hopf introduites par Drinfel'd en relation avec les solutions des équations de Knizhnik-Zamolodchikov.

[19] Dans le cas des groupes abéliens localement compact, les caractères sont les représentations irréductibles. Pour les groupes compacts, le produit tensoriel de deux représentations irréductibles (bien que de dimension finie) n'est pas toujours irréductible.

[20] R.P. Langlands, Where stands functoriality today ?, *Representation Theory and Automorphic Forms*, Proc. Sympos. Pure Math. 61 (1997) p. 457-471. R. P. Langlands, *Endoscopy and beyond*, Notes for a lecture delivered by R. Langlands, IAS, March 30, 2000.

symplectique $M$, un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et à chaque fonction $f$ définie sur $M$, un opérateur de l'espace de Hilbert noté $\mathcal{O}_f$ ou plus simplement $\widehat{f}$. Etant donné une variété symplectique, il s'agit donc de construire un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et une application $Q$ qui associe à chaque observable classique $f$, une observable quantique $\widehat{f}$. En mécanique quantique, la quantification canonique associe aux coordonnées $x_j$ les opérateurs $\widehat{x}_j$ de multiplication par $x_j$ et aux impulsions $p_j$ les opérateurs dérivés

$$\widehat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La *quantification* est une transformation des fonctions relatives aux coordonnées et aux impulsions en opérateurs d'un espace hilbertien

$$Q : f(x_j, p_j) \to \widehat{f}\left(\widehat{x}_j, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

Ce procédé pose plusieurs problèmes. Il suppose qu'il existe des coordonnées globales, que l'espace des phases est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension finie avec des systèmes contraints ou des systèmes ayant des degrés de liberté internes, d'autres problèmes encore, et que le procédé de quantification est unique. Ce qui n'est pas toujours le cas. La quantification de l'équation de Liouville

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

qui décrit l'évolution temporelle d'une observable classique comme crochet de Poisson de l'observable classique $f$ et de l'hamiltonien $H$ a plusieurs solutions. Rappelons que si $M = \mathbb{R}^{2n}$et $\omega$ est la forme symplectique $\omega = \sum dx_j \wedge dp_j$, le crochet de Poisson de deux fonctions $f$ et $g$ est donné par

$$\{f, g\} = \sum_j \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)$$

Dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs évoluent dans le temps alors que les états du système restent constants au cours de l'évolution.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{O}_f(t) = [\mathcal{O}_f(t), \mathcal{O}_H(t)]$$

Au contraire, dans la représentation de Schrödinger, l'évolution est décrite par les états du système $|\Psi(t)\rangle$ alors que les opérateurs $\mathcal{O}_X$ restent constants au cours du temps.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \mathcal{O}_H |\Psi(t)\rangle$$

Un des problèmes posés par la quantification est donc de savoir comment se transforme le crochet de Poisson. Si on définit la quantification $Q$ comme étant une application $\mathbb{C}$-linéaire, telle que $\widehat{f}$ soit un opérateur hermitien, que $Q(1) = Id$ et que pour des fonctions $f$ et $g$ variant lentement, l'opérateur du produit de deux fonctions soit le produit des opérateurs de ces fonctions $\widehat{fg} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \bmod O(\hbar)$, alors on voit que la structure symplectique contrôle la non-commutativité des opérateurs

$$[\widehat{f}, \widehat{g}] \sim i\hbar \widehat{\{f, g\}} \qquad \bmod\ O(\hbar^2)$$

autrement dit qu'à l'ordre $\hbar$, la procédure de quantification transforme le crochet de Poisson en un commutateur vérifiant

$$Q\left(\{f, g\}\right) = \frac{i}{\hbar} [Q(f), Q(g)]$$

Toutefois on sait que dans certains cas simples comme celui d'une particule libre sur une droite, il n'existe pas de fonction $Q$ transformant le crochet de Poisson en un commutateur. La définition adoptée pour la quantification est donc insuffisante.

La *quantification géométrique*[21] propose de prendre en compte les symétries du système physique. Une symétrie du système physique associé à la variété $(M,\omega)$ est un élément d'un groupe de Lie $G$ qui agit symplectiquement sur $(M,\omega)$. Chaque symétrie est représentée par un symplectomorphisme $\phi_g : M \to M$ i.e. qui préserve la forme symplectique $\phi_g^*\omega = \omega$. On démontre que si $f$ est une fonction différentiable de $M$ dans $\mathbb{C}$, alors tout groupe local à un paramètre $(\varphi_t)$ associé au champ[22] de vecteurs hamiltoniens $X_f$ est un groupe de symétries locales. Comme les symétries quantiques sont des opérateurs unitaires, la quantification géométrique cherche à établir une correspondance entre la catégorie des variétés symplectiques et la catégorie des espaces de Hilbert telle que le groupe $G$ soit réalisé comme le groupe des transformations unitaires $U_G(\mathcal{H})$ selon le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & (M,\omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_G(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

Ce diagramme relie la procédure de quantification $Q : (M,\omega) \to \mathcal{H}$ aux représentations irréductibles unitaires du groupe $G$. On complète la définition de la quantification en ajoutant que si $G$ est le groupe de Lie des symétries du système physique agissant transitivement sur $(M,\omega)$ alors il existe une représentation irréductible $(\mathcal{H},\rho)$ d'un sous-groupe des transformations unitaires $U_G(\mathcal{H})$. On postule que si on ne peut passer aussi facilement de la mécanique classique à la mécanique quantique, c'est parce qu'il n'existe pas de foncteur de la catégorie des variétés symplectiques vers la catégorie des espaces de Hilbert[23].

Dans la procédure de *préquantification* de Kostant, Souriau et Segal[24], on se donne une variété symplectique $(M,\omega)$ et si $X_f$ est le champ de vecteurs hamiltoniens, on considère les opérateurs

$$\mathcal{O}_f = -i\hbar\nabla_{X_f} + f$$

On cherche s'il existe des fibrés en droites complexes de base $M$, munis d'une connexion de courbure $\omega/2\pi\hbar$ et d'une structure hermitienne invariante. Un théorème de Kostant montre qu'une condition nécessaire et suffisante de l'existence de ces fibrés est que la classe de cohomologie $[\omega/2\pi\hbar]$ de la forme différentielle $\omega/2\pi\hbar$ soit entière. Si cette condition est vérifiée, l'ensemble des classes d'isomorphies des fibrés est un espace homogène principal dont le groupe est le groupe $\widehat{\pi_1}(M)$ des caractères du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de la variété $M$ (i.e. le groupe des homomorphismes de $\pi_1(M)$ dans $S^1$). Si $M$ est simplement connexe, son groupe fondament est trivial et le fibré est unique à un isomorphisme près. La préquantification consiste donc pour une 1-forme vérifiant la condition d'intégrabilité à construire un fibré en droites complexes $(L,\pi,M)$ de base $M$ muni d'une métrique hermitienne compatible avec la connexion $\nabla$ de courbure $\omega/2\pi\hbar$. Du point de vue physique, la condition d'intégrabilité ($[\omega/2\pi\hbar]$ entière) donne les règles de quantification des niveaux d'énergie. Si le groupe des caractères du groupe fondamental n'est pas trivial, il existe plusieurs fibrés en droites non isomorphes ayant $\omega/2\pi\hbar$ comme courbure. Cela montre qu'un système mécanique représenté par une variété symplectique peut

[21] Voir à ce sujet N.M.J. Woodhouse *Geometric Quantization*, 1992.

[22] Le champ de vecteurs hamiltoniens est défini par $X_f g = \{f,g\}$ et $df = -i(X_f)\omega$.

[23] La catégorie des variétés symplectiques a pour objets, les variétés symplectiques ou espaces des phases et pour morphismes, les applications symplectiques. La catégorie des espaces de Hilbert a pour objets, les espaces de Hilbert et pour morphismes, les opérateurs unitaires.

[24] B. Kostant, "Quantization and unitary representations", in *Lectures in Modern Analysis and Applications,* Springer, p. 87-207. J.M. Souriau, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod, 1970. I.E. Segal, "Quantization of non-linear systems", *Journal of Mathematical Physics*, 1 (1960) p. 468-488.

admettre plusieurs quantifications non équivalentes. C'est le cas d'un système de particules identiques qui admet deux quantifications. C'est la *dualité-monde* des bosons et des fermions.

Introduit par J.E. Moyal en 1949, le produit déformé, plus souvent appelé *star-produit*, est une opération aujourd'hui définie sur l'espace des séries formelles $A[[\hbar]]$ lorsque $A$ est l'algèbre des fonctions lisses d'une variété différentiable $M$ de dimension finie, par la formule

$$f *_\hbar g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n D_n(f,g)$$

Les $D_n$ sont des opérateurs bidifférentiels d'ordre fini. Le produit est associatif $(f *_\hbar (g *_\hbar h) = (f *_\hbar g) *_\hbar h)$ et la fonction 1 est une unité pour ce produit $(1 *_\hbar f = f *_\hbar 1 = f)$. Au premier ordre en $\hbar$, le produit déformé est le simple produit $fg$. Pour chaque star-produit, on définit la *quantification par déformation*[25] comme la transformation des opérateurs de $A$ qui associe la fonction unité à l'identité $Q(1) = Id$, la conjugaison complexe à l'opérateur adjoint et transforme le crochet de Poisson en mesure de la non commutativité du produit déformé

$$Q(\{f,g\}) = \lim_{\hbar \to 0} \frac{f *_\hbar g - g *_\hbar f}{\hbar}$$

En coordonées $(x,p)$, pour le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le star-produit défini par

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{\partial^n g}{\partial p^n}$$

montre la non commutativité des objets $x^2 * p = x^2 p + \hbar 2x$ et $p * x^2 = px^2$. La quantification du crochet de Poisson $Q(\{x^2, p\}) = 2x$ coïncide avec le crochet de Poisson classique

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}$$

lorsque le calcul est effectué pour l'opérateur $p = -i\hbar\partial_x$.

Dans les quantifications que nous venons de décrire la variété symplectique est de dimension finie. Lorsque le système physique a une infinité de degrés de liberté, il existe une quantification que l'on appelle la *seconde quantification*, qui se construit à partir de la quantification d'un espace fini (première quantification). Cette seconde quantification est un foncteur de la catégorie des espaces de Hilbert dans elle-même, qui associe à chaque espace de Hilbert $\mathcal{H}$ son espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. L'ensemble $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe qui représente l'espace des états d'une particule. Le produit tensoriel $\mathcal{H}^n$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec lui même $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$ représente l'espace des états de $n$ particules. Si on pose $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$, l'espace de Fock est la somme de tous ces espaces

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n$$

Un élément de l'espace de Fock est donc une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où chaque élément $f_n$ appartient à l'espace $\mathcal{H}^n$. L'espace de Fock muni du produit scalaire

$$(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \overline{f_n(x_1, ..., x_n)} g_n(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

[25]M. Kontsevitch, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Prepublication IHES, 1997.

est un espace de Hilbert. Pour tout $f_i \in \mathcal{H}$, l'opérateur de symétrisation des bosons[26] est défini par

$$P_+(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}$$

L'espace de Fock bosonique est l'espace $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) = P_+(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$. Physiquement, cet espace est l'espace des fonctions d'onde symétrique (invariable par permutation des coordonnées) de spin demi-entier $n\hbar$. De manière analogue, on définit l'opérateur d'antisymétrisation des fermions[27] par

$$P_-(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \; f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}$$

où $\varepsilon_\sigma$ est la signature de la permutation $\sigma$. L'espace de Fock fermionique est défini par $\mathcal{F}_-(\mathcal{H}) = P_-(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$. Physiquement, cet espace est l'espace des fonctions d'onde antisymétrique de spin demi-entier $n\hbar/2$. Pour un opérateur auto-adjoint borné $A$ de $\mathcal{H}$, on définit un opérateur $d\Gamma(A)_n$ par

$$d\Gamma(A)_n(P_\pm(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)) = P_\pm\left(\sum_{i=1}^{n} f_1 \otimes \cdots \otimes Af_i \otimes \cdots \otimes f_n\right)$$

L'opérateur $d\Gamma$ de seconde quantification[28] est alors la somme directe

$$d\Gamma(A) = \overline{\bigoplus_{n=0}^{\infty} d\Gamma(A)_n}$$

Cet opérateur vérifie la relation de quantification suivante

$$d\Gamma([A,B]) = \overline{[d\Gamma(A), d\Gamma(B)]}$$

Une des caractéristiques de toutes ces méthodes de quantification est la recherche d'un foncteur apte à rendre compte du passage de la mécanique classique à la mécanique quantique, et plus largement à la théorie des champs. La correspondance entre ces domaines repose sur une relation qui s'apparente à la dualité des mondes. D'un côté un calcul qui pose le crochet de Poisson comme acteur essentiel des structures symplectiques, de l'autre un commutateur des observables quantiques qui exhibe leur non commutativité. La quantification montre la complexité des relations entre dualité et fonctorialité, qui se pose dès lors comme un problème ontologique. L'être des objets classiques a une correspondance dans l'être des objets quantiques, et cette correspondance s'indexe sur la constante de Planck qui marque les limites du modèle physico-mathématique actuel.

## Dualité des supercordes

Nous avons vu que la physique des particules a une structure profondément duale. Bosons et fermions se répondent comme quarks et antiquarks. Les équations de Maxwell restent les mêmes lorsqu'on échange le champ électrique et le champ magnétique (par la transformation $E \to B$ , $B \to -E$ ou $F_{\mu\nu} \to \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$). Pour conserver cette symétrie en présence de sources, Dirac a introduit aux côtés des

[26] Les bosons sont des particules de spin demi-entier (photons, particules alpha, mésons $\pi$, kaons, etc.).

[27] Les fermions sont des particules de spin entier (électrons, protons, neutrons, neutrinos, etc.).

[28] On trouvera les démonstrations de ces résultats dans J.T. Ottensen, *Infinite Dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics*, Springer, 1995. La théorie de la seconde quantification remonte à Cook-Segal, in J.M. Cook, "The mathematics of Second Quantization", *Trans. Amer. Math. Soc.* 74 (1953) 222-245. Voir aussi F.A. Berezin, *The Method of Second Quantization,* Academic Press, 1966.

charges électriques $q_e$ des monopoles magnétiques de charge $q_m$. Il a montré que pour rester cohérentes ces charges devaient satisfaire une relation de quantification

$$q_m q_e = 2\pi n$$

dans laquelle $n$ est un entier. La dualité entre charges électriques et charges magnétiques est donc un échange entre $q_e$ et $2\pi/q_e$, c'est-à-dire entre une constante de couplage ($q_e$) et son inverse ($1/q_e$), donc entre un couplage fort et un couplage faible. De là est née l'idée ou du moins l'espoir que la connaissance d'une théorie physique fondée sur un couplage fort pouvait se déduire d'une formulation duale de cette même théorie en couplage faible.

La théorie des supercordes unifie la gravitation et les trois autres forces fondamentales dans un espace à dix dimensions. Si on élimine les théories qui ne résolvent pas les anomalies, il reste cinq modèles de supercordes : deux ont 32 supercharges et sont traditionnellement notés IIA et IIB ; les trois autres ont 16 supercharges et sont dits de type I, hétérotiques HE (relative au multiplet de Yang-Mills $E_8 \otimes E_8$, d'où la lettre $E$ dans l'abréviation HE) et hétérotiques HO (relative à $SO(32)$, d'où vient la lettre O)[29].

A la fin des années 1980, les physiciens ont compris que si on compactifiait les dimensions supplémentaires, alors quatre des cinq théories étaient duales : c'est la *T-dualité*. Dans le cas le plus simple de compactification, si la dimension supplémentaire est un cercle de rayon $R$, le moment relatif à cette dimension est quantifié et de la forme $p = n/R$. La relation relativiste de l'énergie $E^2 = m^2 + p^2$ (dans un système d'unités pour lequel la vitesse de la lumière vaut $c = 1$) montre que l'apport de cette dimension supplémentaire est en $(n/R)^2$. C'est ce qu'on appelle les excitations de Kaluza-Klein. Pour des cordes fermées de longueur caractéristique $\ell_s$, la contribution à la masse est le carré de la tension $T = 1/(2\pi\ell_s)$ multiplié par la longueur d'enroulement de la corde sur le cercle $2\pi Rm$ si la corde est enroulée $m$ fois. Ce qui donne une contribution égale à $(Rm/\ell_s^2)^2$ et qu'on appelle les excitations des modes d'enroulement. La $T$ dualité échange ces deux types excitations de Kaluza-Klein et d'enroulement de modes $m \to n$ et $R \to \ell_s^2/R$. Dans ces conditions, la théorie IIA est duale de la théorie IIB et les théories hétérotiques sont duales

$$IIA \longleftrightarrow IIB \qquad \text{et} \qquad HE \longleftrightarrow HO$$

Si au lieu du cercle, on prend une compactification plus générale, on a des résultats analogues. La théorie IIA compactifiée sur une variété de Calabi-Yau est une théorie IIB compactifiée sur la variété miroir. Comme quatre théories sur cinq sont deux à deux équivalentes, la $T$-dualité réduit donc le nombre de théories à trois ($I$, $IIA$, $HE$).

Une autre dualité, appelée *S-dualité* est apparue dans les années 1990[30]. Elle montre que la constante de couplage des cordes $g_s$ dans une théorie correspond à une constante $1/g_s$ dans la théorie duale. La théorie $IIB$ est auto-duale, si bien que le couplage fort équivaut au couplage faible. La théorie de type $I$ est duale de la théorie hétérotique relative à $SO(32)$.

$$I \longleftrightarrow HO \qquad \text{et} \qquad IIB \longleftrightarrow IIB$$

La question qui s'est alors posée est de savoir comment se comportent les deux théories restantes ($IIA$ et $HE$) lorsque le couplage $g_s$ devient grand ? La réponse à cette question a donné naissance à une onzième dimension (de l'ordre de $g_s\ell_s$), trop

[29] M.B. Green, J.H. Schwarz, "Anomaly cancellation in supersymmetric $D = 10$ gauge theory and superstring theory", *Phys. Lett.* B149 (1984) p. 117.

[30] C. M. Hull, P.K. Twonsend, "Unity of superstring dualities", *Nucl. Phys.* B438, (1995) p. 109 (hep-th/9410167). E. Witten, "String theory dynamics in various dimensions", *Nucl. Phys.* B443, (1995) p. 85 (hep-th/9503124).

grande pour le régime perturbatif et à ce que Witten a appelé la théorie $M$. De nouvelles dualités sont apparues, dont la correspondance AdS/CFT (*Anti de Sitter/ Conformal Field Theory*) qui met en scène un espace géométrique de D-branes fait du produit d'un espace anti-de-Sitter et d'une sphère ($AdS_n \times S^n$) qui est une théorie des champs duale conformément invariante. Ces théories ont conduit les physiciens à chercher une théorie des cordes duale de la chromodynamique quantique qui serait d'après la correspondance AdS/CFT une théorie de dimension 4. La notion de dualité est aujourd'hui au centre des théories de physique des particules qui se développent par unification de modèles. Cette convergence des modèles par identification duale pose sous une forme assez formelle la question des relations entre la dualité, l'identité et l'univocité.

## Dualité et univocité

La thèse médiévale de l'univocité de l'Être a été reprise par Duns Scot, Spinoza, Leibniz et Deleuze indépendamment de la question de la dualité. Elle déplace l'Être vers l'Un qui ne se dit plus que du multiple et porte en elle l'affirmation de l'immanence. Nous avons vu que cette affirmation est la conséquence de la dualité, sans doute comme cas particulier du multiple, mais avec cette différence que le multiple induit un étalement de toutes les choses sur un même plan d'égalité dans une identité générique indifférenciée. Si l'immanence est induite par la dualité et non par l'Un-multiple, alors la différence peut encore jouée un rôle dans l'Un. Non pas pour produire une hiérarchie entre les objets, mais une simple différence entre eux sans qu'il existe pour autant de relation d'ordre qui les classe.

Contrairement aux hypothèses du *Parménide*, l'Un n'existe pas en tant qu'Un, mais en tant que Deux, qui est Un. L'Un est l'Un-Deux. La dualité n'est pas un état universel qui voudrait que tout se divise en deux, mais le constat que des structures de notre univers ont une insistance singulière à se présenter sous deux formes avec des fonctionnements parallèles. Elle n'affecte pas tous les objets et laisse une large place à l'expression du multiple, car « il n'y a jamais eu qu'une proposition ontologique : l'Être est univoque. »[31] Certes, mais cette univocité est une univocité double. L'univocité de l'Être est pour paraphraser une formule de Deleuze, *ontologiquement un, hénologiquement deux et formellement divers*. L'Un, c'est littéralement l'*indivis*, l'individu : la femme et l'homme, le quark et l'antiquark. Pour Duns Scot, si le monde naturel qui nous entoure et le monde au-delà de nos sens sont déjà déterminés par les catégories, la seule chose qui existe réellement est un individuel, qu'il soit déterminé ou non.

Tout se passe comme si l'Être refusait cette dualité. Le physicien parle de *brisure de symétrie* pour dire que le monde est fait majoritairement de particules et non d'antiparticules. Dans le *Parménide*, l'Un est une sorte de Dieu suprême, un objet de science, un point focal qui exclut et conjoint tous les opposés. Si l'Un n'est pas, alors rien n'est. Plotin revient sur la place de l'Être et de l'Un. « C'est parce qu'il n'y a rien en l'Un que tout peut en venir ; pour que l'Être fût, il fallait que l'Un ne fût pas l'Être, qu'il fût le père de l'Être, que l'Être fût son premier-né. »[32] Considérer la dualité revient à ne plus penser l'Un comme transcendant l'Être ou l'Être comme transcendant l'Un. Il faut désormais apprendre à situer ces nouveaux concepts le *dual de l'Être* ou le *dual de l'Un* relativement à l'Être, à l'Un, au Non-Être, au Non-Un ou au Néant.

Le point de départ de la démarche catégorielle ne doit plus être cherché dans l'opposition des termes contradictoires ou contraires. Si l'ontologie est la science des traits catégoriaux, il faut ajouter que les catégories sous les transcendantaux

[31] G. Deleuze, *Différence et répétition*, p. 52.
[32] Plotin, *Livre 2, Ve Ennéade.*

que sont l'Un, l'Être, l'Autre, ne sont pas celles d'Aristote ou de Kant. Être pour les sciences physico-mathématiques de la deuxième moitié du XX$^{e}$ siècle, c'est être universel, être un foncteur, un objet dual ou une composante virtuelle. Être, c'est être pris dans le maelström du quadrilatère épistémique.

Ce sont des éléments de dualité qui justifient ce presque-rien qui sépare la science de la philosophie et qui les place en situation de mutuelle réciprocité. La science se construit sur ses résultats alors que la philosophie est toujours à la recherche d'une autolégitimation, en perpétuelle reprise de son commencement. Dans la dualité entre science et philosophie, la vérité est coextensive de la science ou de sa base topologique, qui on l'a vu détermine sa logique immanente (classique pour les topoi booléens). En somme, la science n'est pas l'envers ou l'Autre de la philosophie. Elle ne pense pas indépendamment de la philosophie et la philosophie ne se nourrit pas de connaissances indépendamment de connaissances scientifiques. Pour autant, la science n'est pas le dual de la philosophie, puisque tout esthétique ne saurait trouver de contrepartie scientifique. La tâche de l'épistémologie n'est donc pas d'utiliser philosophiquement la science, mais de *penser avec* la science. Comme l'ontologie est la pensée de l'Être, si les sciences physico-mathématiques sont la pensée de l'Un et si l'Être est le dual de l'Un, alors les sciences physico-mathématiques et l'ontologie sont duales. C'est peut-être le seul sens possible du mathème badiolien « Les mathématiques sont l'ontologie ».

# Conclusion

Au terme de cette enquête sur les diagrammes et les catégories, il faut réaffirmer avec force que l'épistémologie suppose des orientations ontologiques qui s'appuient sur les résultats les plus récents des sciences physico-mathématiques, trop peu connus et trop souvent négligés que nous avons essayé de présenter de manière aussi synthétique que possible. Ce parcours nous a aussi conduit à une critique du logicisme et de la philosophie analytique et de ses prolongements qui mènent trop souvent à une illusion de profondeur orchestrée par la réduction tautologique. Toutefois, il ne s'agit pas d'exclure la logique du champ philosophique, mais il nous paraît plus fondamental de reconsidérer ce qui la fonde, le morpho-topologique qui la précède dans ses soubassements mêmes. Nous condamnons donc ces philosophies qui ne cessent de tourner autour des mêmes propositions, celles qui affirment que "tous les corbeaux sont noirs". Car il nous paraît aujourd'hui essentiel de reconsidérer ces propositions universelles et de savoir que faire d'un corbeau qui serait aussi bleu que l'orange d'Eluard.

Une des conséquences de la théorie mathématique des catégories est que la logique est déterminée par le topologique. Ce qui compte désormais n'est pas la proposition, mais le lieu, le *topos* qui a sa propre vie organique et qui impose ses modes de raisonnement. Par défaut, la logique immanente d'un topos est intuitionniste : le tiers exclu n'est plus valable, ni le mode de démonstration par l'absurde. Lorsque l'axiome du choix est vérifié, ou de manière équivalente lorsqu'il existe une structure topologique particulière des ensembles infinis, alors le théorème de Diaconescu pose que le topos est booléen et que sa logique est classique. Cette logique aboutit le plus souvent à un partage sans autres perspectives entre des propositions qui se résolvent par tautologies pour prolonger des axiomes initiaux et des propositions fausses qui les contredisent. Dans tous les cas, classique ou non, le topologique précède le logique. L'ontologie n'est plus placée sous la dépendance de la logique, mais du topologique. Cette instance ouvre la voie à une nouvelle description de la topologie de l'Être ou *onto-(po)-logie*. Le but de toute ontologie est une théorie des catégories.

Nous avons retenu quatre concepts principaux entre lesquels se joue le destin de toutes les disciplines scientifiques : la virtualité, la fonctorialité, l'universalité et la dualité. Ces concepts ont des conséquences ontologiques importantes et marquent deux grandes discontinuités dans l'*épistémè* des sciences physiques et mathématiques de la seconde moitié du XX^e^ siècle : celle qui inaugure le tournant diagrammatique de la physique et celle qui donne aux mathématiques la théorie des catégories et des *topoi*, la puissance d'une machinerie qui ne repose que sur des mouvements d'objets et de flèches. La rupture et la discontinuité viennent du fait que le partage entre syntaxe, sémantique et logique n'est plus essentiel, d'une part parce que les diagrammes se dispensent du langage et d'autre part parce que les catégories privilégient le topologique au logique. Ainsi diagrammes et catégories s'inscrivent au cœur du quadrilatère épistémique. Comme il est fait d'éléments composites, le diagramme, que l'on distingue soigneusement du schéma et de la structure, est un point de passage essentiel entre l'actuel et le virtuel que révèle le fonctionnement diagrammatique qui se construit sur des machineries complexes interagissant entre strates de différents niveaux. Dans sa relation à la notion de graphe, il est fortement impliqué dans les aspects fonctoriels, et aussi par sa bivalence dans le processus naturel de dualité. Son universalité réside pour les sciences physiques dans l'application des techniques diagrammatiques à d'autres domaines que l'électrodynamique quantique comme la chromodynamique quantique et la physique statistique, et pour les sciences mathématiques dans une définition singulière des objets universels. Une catégorie mathématique n'est pas une catégorie philosophique, mais plutôt un univers ou un monde possible. Il est toutefois curieux de constater que les deux théorèmes les plus profonds de la théorie des catégories et des topoi – le lemme de Yoneda et le théorème de Diaconescu – ont été très peu commentés. Dans le lemme de Yoneda, l'objet est remplacé par ses points de vue : l'objectif et le subjectif coïncident. Il s'ensuit que le lemme de Yoneda en associant objets et point de vue déplace l'articulation de la dualité entre objets et opérations que l'on trouve aussi dans les diagrammes. Dans le théorème de Diaconescu, la validité de l'axiome du choix dont nous avons vu de nombreuses formulations topologiques impose une logique classique. Dans un topos, la vérité est une conséquence des propriétés topologiques. Le Deux n'est pas seulement un espace abstrait identifié aux seules valeurs du vrai et du faux, mais par le biais de la fonctorialité conduisant à des transferts de propriétés imposés par la nature topologique du monde, un espace où le principe de dualité applique des résultats en parallèle sur des objets et des morphismes coexistants comme entre une matière et une antimatière. La prégnance du quadrilatère est si forte qu'il laisse penser que la mathématique se pense elle-même, qu'il existe une philosophie des sciences physico-mathématiques, une philosophie qui trouve sa justification et ses arguments dans les démonstrations et les constructions de la science.

On comprend que la notion de vérité elle-même soit remise en cause. Pour rendre compte de ces lieux qui préludent à l'établissement logique, la vérité ne peut plus être pensée et utilisée comme une fonction de valuation sur un espace de propositions auquel est associée une valeur numérique ou booléenne, une valuation normative où son rôle est de vérifier une possibilité. La vérité est d'abord une intuition foudroyante qui dit la vérité du lieu. Non seulement il y a des zones d'indécidabilité, des régions où la vérité est quantifiée, mais aussi des espaces où le mode de propagation des vérités n'est pas l'inférence sur des chaînes de propositions vraies, mais des pans entiers résonants entre modèles adéquats. À remonter à l'origine de la vérité, on s'aperçoit qu'elle correspond à quelque chose que l'on ne sait pas très bien définir, mais qui est en relation avec l'Être ou les étants. Pour Heidegger, la vérité, en tant que non-latence, est l'avènement de la perdominance de l'étant lui-même. Pour nous, la vérité serait plutôt à chercher dans une résonance harmonique de l'Être de l'étant, ou comme la forme fonctorielle de l'immanence de l'Être. Avec le développement des connaissances érigé en instrument pour acquérir le vrai, la notion de vérité s'est déplacée, abandonnant cette symbiose des corps et des objets où elle prenait sa source. Elle s'est mise au service de la proposition et est devenue une propriété du logos. Dans ce cheminement généalogique, elle est devenue selon l'expression de Heidegger, le lieu de la justesse ou de la *rectitude* du logos. Puis au contact des modèles physico-mathématiques, elle s'est encore transformée pour devenir le lieu de l'*adéquation.* Si bien que l'atomisation et la localisation de la vérité à des propositions logiques ont disparu au profit d'une globalisation, d'une vérité foudre, d'une vérité événementielle, plus proche de sa dimension originelle.

Le diagramme est le lieu de cette vérité qui ne se saisit pas par une succession d'inférences logiques, mais globalement, intuitivement, dans une dimension intellectuelle et corporelle qui passe par le geste. Car le propre du diagramme est de tendre à conserver la mémoire du geste qui permet de le rejouer et de le prolonger. Pour faire l'expérience du diagramme, pour assembler le divers des éléments de sens qu'il donne à voir, pour que la machinerie diagrammatique joue son rôle, il faut que le sens s'incarne dans le corps qui est le seul creuset *in fine* où ce sens puisse réaliser sa transmutation en logos. Rien ne peut être compris s'il ne passe par le corps. Le diagramme a cette dimension haptique où la proximité du sens est voisine de l'intimité et de la liberté des corps. Le corps s'approprie le diagramme librement selon l'axe créateur qui lui convient sans préjuger d'une orientation préalable, dans des modalités empiriques ou aléatoires et des ordonnancements de son choix. Pour Descartes, seul l'entendement a le pouvoir de percevoir la vérité. Il perçoit effectivement une vérité, mais c'est une vérité partielle, *décharnée*, non assimilée, qui si elle n'est pas passée par le corps, ne pourra prolonger le geste créateur que le diagramme immobilise. Ce geste fossilisé que nous avons appelé *spectre* et que le diagramme déploie est précisément l'anti-chambre du logos. En somme, l'acte de connaissance est la liberté d'appréhension corporelle des spectres. Le dévoilement du geste induit le dénouement du sens.

Le diagramme est à l'interface de l'actuel et du virtuel. Le virtuel est ce qui pousse sous l'actuel. Il faut revenir à son étymologie de *vis* (la force) pour comprendre que le virtuel est une réalité qui ne demande qu'à s'actualiser. *Le virtuel est une réalité en acte inaccomplie, repli de l'infini par des singularités sur un horizon actuel, qui tend à l'accomplissement.* C'est une activité souterraine qui sourde dans le monde, une dimension pleine de la réalité, à la différence du possible ou du potentiel. La réalité a donc deux composantes et tout objet, tout entité de notre univers, est un composé à différents degrés d'actuel et de virtuel. Pour bien comprendre ce qu'est le virtuel, il faut éviter plusieurs contresens. Le premier est de l'assimiler au partage aristotélicien de l'acte et de la puissance. L'acte serait l'actuel et la puissance, le virtuel. Or le virtuel est une réalité en acte, même si elle est inaccomplie ou inachevée. C'est une réalité qui place les singularités sur une ligne d'horizon comme un repli de l'infini pour donner à voir l'image virtuelle de cet infini qui autrement nous serait inaccessible. Le virtuel n'est pas non plus le possible. Comme le virtuel appartient à la réalité du monde, il ne peut se confondre ni avec le possible, ni avec le potentiel. Le virtuel n'est pas ce qui adviendra, ce qu'il est possible qu'il advienne, mais est coprésent à l'actuel. Le virtuel n'est pas une réalité cachée qui nous serait révélée au moment de son actualisation. Dans ce cas, le virtuel serait une chimère car la réalité du virtuel serait inaccessible puisqu'avant d'être actualisée elle serait inconnue, et après son actualisation elle disparaitrait dans la réalité actuelle qui ne saurait se confondre avec la réalité virtuelle qui l'a fait naître. Il ne faut pas considérer que le virtuel est l'inconnu et l'actuel le connu. La vérité n'est pas l'actualisation d'une virtualité. Le virtuel n'est pas non plus la mémoire de l'objet qui enfermerait son histoire. Dans ces conditions, le virtuel serait assimilé au passé, l'actuel au présent et le potentiel au futur. La distinction ne porterait que sur un partage du temps et ne serait qu'un simple changement de noms. Même si tous les objets n'ont pas de composantes virtuelles, le virtuel n'est pas vide pour autant (les images virtuelles de l'optique physique et géométrique en témoignent). La différence entre l'actuel et le virtuel est essentiellement ontologique.

Le virtuel n'est pas l'Être de l'étant, car l'Être de l'étant n'est pas une réalité inaccomplie, mais bien au contraire une réalité en acte accomplie, actuelle qui assure l'existence des étants. Exclure l'Être de l'étant de l'actuel, c'est restreindre l'actuel à l'étant. Cela revient à faire de l'actuel le monde sensible ou trans-sensible, l'*ens naturae,* la réalité des choses et du virtuel le monde rationnel, l'*ens rationis* ou le monde de l'activité intellectuelle. Autrement dit, cela conduit soit à un partage entre les âmes et les corps, soit dans la philosophie aristotélicienne, à un partage entre une forme qui serait le principe du virtuel qui donnerait à la réalité physique et psychique sa structure actuelle. Ce qui n'est pas acceptable. Par conséquent, il faut rejeter l'idée que l'actuel se restreint à l'étant et que l'Être de l'étant (c'est-à-dire la *quiddité*) n'est pas actuel. Il s'ensuit que *l'actuel est l'étant en tant qu'Être*. Ce rôle ne peut pas être tenu par le virtuel, car le virtuel s'il existe est ailleurs.

Comment le virtuel qui n'appartient pas à l'Être pourrait-il exister ? Pour sortir de cette contradiction, il n'y a que deux solutions. Soit on considère que le virtuel n'existe pas, mais nous avons vu que cela est en désaccord avec la science, soit le virtuel existe et dans ce cas il faut invoquer l'Un, non pas pour l'assimiler au virtuel ou convoquer d'anciens préjugés religieux, mais pour faire l'hypothèse que *l'Un est le dual de l'Être*, un espace double qui permet de réintroduire le virtuel sur un même degré que l'actuel. Il n'est pas simple de comprendre cette notion de dualité si on ne l'a pas pratiqué soi-même dans les sciences car sous cette forme elle n'existe pas en philosophie. Partant du constat que toute mutiplicité est une (*unique*) multitude, on voit que les étants se ramènent à des individus, c'est-à-dire des objets individuels existants à des moments déterminés comme les pensées ou les sentiments, ou qui existent indépendamment du temps comme les universaux. Tout objet-un est une mutiplicité et toute multiplicité est un objet-un. Cette *hétérothésis* de l'Un et du Multiple fonde l'idée que l'Un est le dual de l'Être. Deux espaces différents, indissociables l'un de l'autre fonctionnant en parallèle. Ce qui suppose qu'il existe des *unants* qui sont à l'Un ce que les étants sont à l'¨Être. Et par dualité si l'actuel est l'étant en tant qu'Être, il s'ensuit que *le virtuel est l'unant en tant qu'Un*. L'unant est donc le dual de l'étant autrement dit un étant qui privilégie son caractère unitaire. Si un objet a des singularités, l'unant unifie ces singularités infinies afin qu'elles nous soient accessibles à travers l'étant. C'est dans ce sens que nous comprenons que « le virtuel est déploiement de l'Un dans sa différenciation immanente. » On ne peut affirmer que le virtuel fonde l'actuel, mais certainement que le virtuel *dualise* l'actuel.

L'Un est à l'origine du concept de mesurabiliité. Pour passer de l'Un au multiple, pour que l'Un dérive le nombre 1, il faut inventer un concept de mesure ou de nombre : c'est le *ratio mensurae* de Duns Scot ou la *fonction successeur* de Peano. L'Être seul ne peut assurer l'existence du Nombre. Pour que le Nombre existe, il faut que l'Un en tant que dual de l'Être, lui offre ce supplément qui lui assure sa fonction première qui est de calculer. Cette dualité de l'Être et de l'Un est la condition *sine qua non* de la possibilité des sciences physico-mathématiques, induite par la mesurabilité et introduite par l'Un en tant que principe unitaire. Car la mesurabilité est comme le nombre totalement étrangère à l'Être qui ne peut être approché par des techniques numériques ou analytiques. Sous certaines conditions, les étants deviennent mesurables dans l'espace dual, mais nous savons aussi qu'il existe des étants constructibles qui ne sont pas mesurables. L'Un n'est pas seulement la possibilité d'un processus comptable, il est avant tout le garant de l'unité des objets qu'ils soient mesurables ou non et c'est pourquoi il atteste sans relâche l'existence de l'universel. C'est l'Un encore qui fait que tous les mathématiciens parlent de la même mathématique.

Ce n'est pas un hasard si l'existence et l'unicité jouent un rôle essentiel et complémentaire dans les démonstrations mathématiques, car la vérité naît au point de jonction de cette dualité de l'Être et de l'Un qui est justement le propre de l'événement. C'est pourquoi il ne peut exister qu'une *vérité-foudre*, une *vérité-événement* comme point de transcendance (la transcendance est ce qui est au-delà des catégories) d'une complète et entière symbiose ou communion avec l'objet à connaître. C'est la présence de l'Un comme principe unificateur qui permet cette symbiose qui replie les morphismes de l'objet dans le lemme de Yoneda et donne à l'Un-Multiple la possibilité d'une parfaite identification du sujet et de l'objet. C'est ce qui fonde l'*adéquation* que l'on appelle par ailleurs la vérité. Comme les étants sont parfois considérés comme des simulacres qui manifestent la *puissance du faux*, il n'est pas toujours facile dans ces conditions d'atteindre cette adéquation et le libre parcours qui y conduit est souvent fait de trajectoires aléatoires, de chausse-trappes et de points de rebroussement. Le divers et la liberté de ces parcours est l'expression du multiple. La dualité est donatrice du sens qui fonde le vrai. On comprend que la vérité n'est ni catégorie, ni une métacatégorie, qu'elle est coextensive à la dualité de l'Être et de l'Un.

L'étant est toujours donné comme un divers, divisé et multiple, mais doublé de l'unant qui dualise le domaine ontologique. De la sorte, il ne peut exister de domaine extra-ontologique où l'on placerait le divers et la multiplicité empirique en dehors de l'Être comme dans les philosophies de Kant, Heidegger ou Husserl et de domaine intra-ontologique où la multiplicité du monde serait donnée de manière inhérente comme dans les philosophies de Nietzsche ou de Deleuze à travers des *a priori* ou des *machines désirantes*, car la multiplicité se confond toujours dans l'unicité. Mais cette unicité n'a pas été perçue simultanément. Elle a d'abord été comprise comme agissant a posteriori, laissant place à la Différence. La Différence est considérée comme la multiplicité ontique de l'ontologique qui fait de l'objet une multiplicité pure. Les usages de cette Différence ont donné les diverses variantes philosophiques. De là est née la difficulté de situer la diversité de l'étant comme un point de vue propre de l'ontologique ou comme l'expression universelle d'un a priori ordonné à la réalité du monde. Cette différence empirique ou transcendantale est donc la position *topologique* interne ou externe de l'Être relativement à l'étant. Et c'est là l'erreur des philosophies de la Différence qui prennent l'Être pour l'Un, cherchent l'affection de l'Être par l'étant et distinguent un intérieur d'un extérieur ontologique. Comme l'ontologie n'a pas de bord, il n'y a pas lieu de distinguer un intérieur d'un extérieur. Ce n'est pas l'Être qui devient à son tour un étant, mais l'étant qui se fait *unant* qui lui-même se relève dans l'Un. Ce passage à l'Un se présente sous la forme d'une unification totale et complète de la diversité du multiple. Ce rassemblement vers un Tout n'est pas une somme empirique d'étants particuliers où surgirait de nouveau un curieux moteur métaphysique composé de couples universel-particulier, mais l'expression de la dualité de l'Être et de l'Un qui est le vrai principe transcendantal de la métaphysique.

Dans la philosophie de Heidegger, l'Être est pensé comme le *Tout de l'étant*. Mais ce Tout ne peut pas être déterminé de manière métaphysique, mais transcendantal. La raison est que le Tout n'est pas un Tout empirique, qu'il est subordonné à l'Un, plutôt que dans les parties qu'il unifie. Si la Différence opère une déconstruction dans la relation entre l'Être et l'étant par le *foncteur d'oubli*, il ne faut pas en déduire que cette déconstruction se traduit fonctoriellement sur la relation entre l'Être et l'Un, mais plus sûrement entre l'Un et l'unant. L'Être n'est pas ce qui reste lorsqu'on le prive de l'étant. L'Être n'est pas l'*Autre de l'étant*. Ce partage ensembliste entre l'étant et le non-étant n'est pas valable. Il suppose une logique classique non intuitionniste qui n'est pas adaptée et qui conduit à réintroduire l'étant comme particulier. L'existence d'une structure duale empêche de penser l'étant et le non-étant comme un partage dyadique complet qui partitionnerait exactement l'Être en deux parties disjointes comme un universel et un particulier, un ensemble de vérités et une scène de simulacres.

Que l'Être se dise en un seul et même sens, que l'Être soit univoque n'est pas en contradiction avec la multiplicité des étants. C'est ce qu'enseignent les composantes du quadrilatère que sont l'universalité qui se porte entre catégories à travers une unicité fonctorielle et la dualité qui assume l'ambivalence des étants et des unants.

Si l'univocité n'existait pas, il ne pourrait exister d'universalité. Les scientifiques ne parleraient pas le même langage, le sens n'aurait plus ce caractère univoque qui garantit la communication. L'Un lui-même n'est pas une unité, il est toujours double en tant que dual. Il s'ensuit que *les étants sont formellement divers, hénologiquement deux et ontologiquement un.*

Que cette univocité soit ontologiquement unique n'est possible que sous la condition de la dualité de l'Être et de l'Un. La conséquence de cette dualité est qu'il n'existe qu'un seul sens qui se cache non pas sous les *logiques des mondes*, mais qui est enfoui plus profondément sous le topologique. Dualement, l'univocité n'est pas un rempart à l'équivocité ontologique. Il suffit de ne pas tout immobiliser dans une catégorie suprême comme la substance, où l'infinité des étants n'a de cesse de converger vers un unique point d'absorption. L'univocité ou l'immanence de l'Être n'est pas une réduction ponctuelle, c'est pourquoi elle ne s'oppose pas à l'approche catégorielle. *Une catégorie est un territoire de l'étant et non de l'Être.* Il n'est pas utile de soutenir que l'Être se dise en plusieurs sens pour justifier l'existence des catégories qui se portent à un autre niveau que celui de l'Être. Parce que les modalités ou les formes de l'Être sont des collections d'étants en tant qu'expressions duales de collections d'unants qui s'agrègent dans des configurations ontologiques uniques. Comme l'étant se dit en plusieurs sens, les catégories se disent aussi selon leur multiplicité et doivent leur cohésion au principe de dualité.

# Bibliographie

[1] Abrioux (Yves). "Diagramme, histoire, devenir ou, quand Deleuze fait de l'histoire de l'art", *Théorie, Littérature, Enseignement*, Presses Universitaires de Vincennes, 22 (2004) 165-176.

[2] Aczel (Peter). *Non-Well-Founded Sets.* CSLI Lecture Notes No. 14, Stanford (1988).

[3] Alliez (Eric). *La signature du monde.* Paris : Cerf (1993).

[4] Allwein (Gerard), Barwise (Jon), eds. *Logical Reasoning with Diagrams*, New-York : Oxford University Press (1996).

[5] Alunni (Charles). "Diagrammes et catégories comme prolégomènes à la question : *Qu'est-ce que s'orienter diagrammatiquement dans la pensée ?*", *Théorie, Littérature, Enseignement*, Presses Universitaires de Vincennes, 22 (2004) 83-93.

[6] Alunni (Charles). "Qu'est-ce que s'orienter diagrammatiquement dans la pensée ?", Conférence au Collège de France, Séminaire APC (Astroparticule et Cosmologie), 17 mars 2005.

[7] Anderson (Michael), Cheng (Peter), Haarslev (Volker, eds.), *Theory and Applications of Diagrams*, Proceedings of the First International Conference, Edinburgh, Springer, 2000.

[8] Arabî (Ibn). *La production des cercles*, traduit de l'arabe, présenté et annoté par Paul Fenton et Maurice Gloton, texte arabe établi par H.S. Nyberg. Paris : Editions de l'éclat (1996).

[9] Aristote. *Métaphysique*, Trad. Jules Tricot, 2 vol. Paris : Vrin (1933).

[10] Aristote. *Organon. Tome 1-2, Catégories. De l'Interprétation. Tome 3, Les Premiers analytiques. Tome 4, Les Seconds analytiques. Tome 5, Les Topiques. Tome 6, Les Réfutations sophistiques,* Trad. Jules Tricot. Paris : Vrin (1993).

[11] Armstrong (David). *Universals. An Opinionated Introduction*, Boulder : Westview Press (1989).

[12] Armstrong (David). *A World of States of Affairs*, Cambridge University Press (1999).

[13] Arnauld (Antoine). *La logique ou l'art de penser.* Paris : Vrin (première édition 1662, 1981).

[14] Asperti (Andrea), Longo (Giuseppe). *Categories, Types and Structures*, MIT Press, (1991).

[15] Aubenque (Pierre). *Le problème de l'être chez Aristote*, Paris : Presses Universitaires de France (1962).

[16] Aubenque (Pierre, éd.) *Concepts et catégories dans la pensée classique*, Paris : Vrin (1990).

[17] Bachelard (Gaston), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris : Vrin (1967).

[18] Bachelard (Gaston). *Les intuitions atomistiques : essai de classification*, Paris : Vrin (1932).

[19] Bacon (Francis). *Novum organum*, trad. et notes par Michel Malherbe et Jean-Marie Pousseur, Paris : Presses Universitaires de France (2001).

[20] Bacon (John). *Universals and Property Instances. The Alphabet of Being.* Oxford : Blackwell (1995).

[21] Badiou (Alain). *L'Être et l'événement*, Paris : Seuil (1988).

[22] Badiou (Alain). *Le Nombre et les nombres*, Paris : Seuil (1990).

[23] Badiou (Alain). "Platon et/ou Aristote-Leibniz. Théorie des ensembles et théories des topos sous l'oeil du philosophe", in Salanskis, *L'objectivité mathématique* (1995) 61-83.

[24] Badiou (Alain). *Deleuze. La clameur de l'Être.* Paris : Hachette (1997).

[25] Badiou (Alain). *Court traité d'ontologie transitoire*, Paris : Seuil (1998).

[26] Badiou (Alain). *Topos ou Logiques de l'onto-logiqu. Une introduction pour les philosophes,* Tome 1, tapuscrit, Paris : ENS (1998).

[27] Badiou (Alain). *Logiques des mondes. L'Être et l'événement 2.* Paris : Seuil (2006).

[28] Bailly (Francis), Longo (Giuseppe), *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant.* Hermann, (2006).

[29] Balibar (Françoise). *Einstein 1905. De l'éther aux quanta*, Paris : Presses Universitaires de France (1992).

[30] Barker (Jason). *Alain Badiou, a critical introduction*, Pluto Press (2002).

[31] Barnes (Jonathan). "Les catégories et les *Catégories*" in *Les catégories et leur histoire*, édité par O. Bruun et L. Corti, Paris, Vrin (2005) 10-80.

[32] Barwise (Jon), Etchemendy (John). *Hyperproof*, Standford : CSLI Publications (1994).

[33] Batt (Noëlle). "L'expérience diagrammatique : un nouveau régime de pensée", *Théorie, Littérature, Enseignement*, Presses Universitaires de Vincennes, 22 (2004) 5-28.

[34] Bell (John L.). *Toposes and Local Set Theories*, Oxford University Press (1988).

[35] Bénabou (Jean), Celeyrette (Jean). "Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney", *Séminaire Bénabou* (1971).

[36] Benacerraf (P) Putnam (H. eds.). *Philosophy of mathematics*, Cambridge University Press (Deuxième édition, 1983).

[37] Benoist (Jocelyn). *Phénoménologie, sémantique, ontologie : Husserl et la tradition logique autrichienne*, Paris : Presses Universitaires de France (1997).

[38] Benoist (Jocelyn). *Représentations sans objet. Aux origines de la phénoménologie et de la philosophie analytique.* Paris : Presses Universitaires de France (2001).

[39] Benoist (Jocelyn, éd.). *Propositions et états de choses. Entre être et sens.* Paris : Vrin (2006).

[40] Bensaude-Vincent (Bernadette). "La chimie : un statut toujours problématique du savoir", *Revue de Synthèse*, 1-2 (1994) 135-148.

[41] Bergen (Véronique). *L'ontologie de Gilles Deleuze*, Paris : L'Harmattan (2001).

[42] Béziau (Jean-Yves). "La théorie des ensembles et la théorie des catégories : Présentation de deux soeurs ennemies du point de vue de leurs relations avec les fondements des mathématiques", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, IX-1 (2002) 45-53.

[43] Béziau (Jean-Yves), Payette (Gillman). *Handbook of the First World Congress on the Square of Opposites*, Montreux (Suisse), (2007)

[44] Bitbol (Michel). *Physique et philosophie de l'esprit*, Paris : Flammarion (2000).

[45] Blackwell (Alan), Engelhardt (Yuri). "A Taxonomy of Diagram Taxonomies", Proceedings de la conférence *Thinking with Diagrams 98 : Is there a science of diagrams ?*, (1998) 60-70. Disponible sur http ://www.cl.cam.ac.uk/~afb21/publications/TwD98.html.

[46] Blackwell (Alan). *Thinking with diagrams,* Kluwer Academic (2001).

[47] Blanché (Robert). *Structures intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts*, Paris : Vrin (1969).

[48] Bloch (Ernst). *Experimentum mundi. Question, catégories de l'élaboration, praxis*, Trad. Gérard Raulet, Paris : Payot (1981).

[49] Boole (George). *An investigation of the laws of thought.* London : Macmillan (1854). Reprinted by Dover, New York (1958).

[50] Borceux (Francis). *Handbook of categorical algebra*, 3 vols, Cambridge University Press (1994).

[51] Boulnois (Olivier). *Être et représentation : une généalogie de la métaphysique moderne à l'époque de Duns Scot, XIII$^e$-XIV$^e$ siècle*, Paris : Presses Universitaires de France (1999).

[52] Brentano (Franz). *De la diversité des acceptions de l'être d'après Aristote*, trad. de l'allemand par Pascal David, Paris : Vrin (1992).

[53] Brentano (Franz). *The Theory of categories*, traduit par Roderick M. Chisholm et Norbert Guterman, La Haye : Nijhoff (1981).

[54] Briard (Joël). *Logique et théorie du signe au XIV$^e$ siècle*, Paris : Vrin (1989).

[55] Bruno (Giordano). *Oeuvres complètes,* Paris : Les Belles Lettres (1993).

[56] Bruun (Otto), Corti (Lorenzo), éds. *Les catégories et leur histoire*, Paris, Vrin (2005).

[57] Campbell (Keith). *Abstract particulars*, Londres : Basil Blackwell (1990).

[58] Cao (Tian Yu). *Conceptual developments of 20$^{th}$ century field theories*, Cambridge University Press (1997).

[59] Cartan (Henri), Eilenberg (Samuel). *Homological algebra*, Princeton Univerty Press, 1956.

[60] Cartier (Pierre). “A Mad Day’s Work : From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The Evolution of Concepts of Space and Symmetry”, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 38-4 (2001) 389-408.

[61] Cartwright (Nancy). *How the laws of physics lie*, Oxford : Clarendon Press (1983).

[62] Cassirer (Ernst). *La philosophie des formes symboliques*, Paris : Minuit, 3 vol. (1972).

[63] Cavaillès (Jean). *Oeuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris : Hermann (1994).

[64] Caveing (Maurice). *Le problème des objets dans la pensée mathématique,* Paris : Vrin (2004).

[65] Celeyrette (Jean), “L’argumentation mathématique dans la physique d’Oresme”, in Christophe Grellard, éd., *Méthodes et statut des sciences à la fin du Moyen-Âge*, Lille : Presses Universitaires du Septentrion (2004) 201-215.

[66] Châtelet (Gilles). “Intuition géométrique, Intuition physique”, *CISM, Selected Papers on the Teaching of Mathematics,* Springer, 305 (1988) 99-113.

[67] Châtelet (Gilles). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*, Paris : Seuil (1993).

[68] Châtelet (Gilles). “Métaphores, diagrammes et singularités”, in *La Passion des formes*, *À René Thom,* Tome 1, Paris : ENS Éditions (1994).

[69] Châtelet (Gilles). “Principes épistémologiques et programme de recherches”, Séminaire ENS “Pensée des Sciences”, Séance du 29 février 1996, (à paraître).

[70] Châtelet (Gilles). “La géométrie romantique comme nouvelle pratique intuitive”, in Dominique Flament, *Le Nombre une hydre à n visages,* Paris : Editions de la Maison des Sciences de l’Homme (1997).

[71] Châtelet (Gilles). “Les Mondes possibles”, Séminaire ENS, 1997, (à paraître).

[72] Châtelet (Gilles). “Interlacing the singularity, the diagram and the metaphor”, in *Virtual Mathematics*, Manchester : Clinamen Press, (2006) 31-45.

[73] Chemla (Karine), Guo (Shuchun). *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, Paris : Dunod (2004).

[74] Chew (Geoffrey). *S-Matrix theory of strong interactions*, New-York : W.A. Benjamin (1961).

[75] Chisholm (Roderick). *A realistic theory of categories. An essay on ontology,* Cambridge University Press (1996).

[76] Clagett (Marshall). *Nicole Orseme and the medieval geometry of qualities and motions : a treatise on the uniformity and difformity of intensities known as tractatus De configurationibus qualitatum et motuum*, Madison : University of Wisconsin Press (1968).

[77] Cléro (Jean-Pierre). *Les raisons de la fiction. Les philosophes et les mathématiques.* Paris : Armand Colin (2004).

[78] Cocchiarella (Nino). *Logical investigations of predication theory and the problem of universals*, Naples : Bibliopolis Press (1986).

[79] Cohen (Paul). *Set theory and the continuum hypothesis.* Addison-Wesley (1966).

[80] Cohen-Tannoudji (Gilles), Spiro (Michel). *La matière-espace-temps, la logique des particules élémentaires*, Paris : Fayard (1986).

[81] Cohen-Tannoudji (Gilles). *Les constantes universelles*, Introduction de Dominique Lecourt, Paris : Hachette (1998).

[82] Cohen-Tannoudji (Gilles), Besnier (Jean-Michel), Trân Thanh Vân (Jean, eds.). *Virtualité et réalité dans les sciences*, Paris : Editions Frontières (1995).

[83] Coquereaux (Robert). “Classical and quantum polyhedra : A fusion graph algebra point of view”, *AIP Conf. Proc.* 589 (2001) 181-203.

[84] Coquereaux (Robert), Schieber (Gil). “Twisted partition functions for ADE boundary conformal field theories and Ocneanu algebras of quantum symmetries”, *Journal of Geometry and Physics* 42 (2002) 216.

[85] Courtine (Jean-François). *Suarez et le système de la métaphysique,* Paris : Presses Universitaires de France (1990).

[86] Courtine (Jean-François). “La question des catégories : le débat entre Tredelenburg et Bonitz”, *Aristote au XIX*$^{e}$ *siècle*, édité par Denis Thouard (2006) 63-80.

[87] Courtine (Jean-François). *Inventio analogiae. Métaphysique et ontothéologie.* Paris : Vrin (2005).

[88] Couturat (Louis). *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Hildesheim : G. Olms (1988).

[89] CVITANOVIĆ (Predrag). "Group theory for Feynman diagrams in non-abelian gauge theories", *Physical Review D,* 14 (1976) 1536-1553.

[90] CVITANOVIĆ (Predrag), KENNEDY (A.D.). "Spinors in negative dimensions", *Physica Scripta*, 26 (1982) 5-14.

[91] CVITANOVIĆ (Predrag). *Group theory, Lie's, Tracks, and Exceptional Groups* (2002) web-book disponible à http ://www.nbi.dk/GroupTheory.

[92] DAGOGNET (François). *Tableaux et langages de la chimie : essai sur la représentation*, Paris : Seuil (1969).

[93] DAGOGNET (François). "Valentin Haüy, Etienne Geoffroy Saint-Hilaire, Augustin-Pyramus de Candolle : une conception d'ensemble mais aussi un ensemble de conceptions", *Revue d'histoire des sciences*, 25-4 (1972) 327-336.

[94] DAMOUR (Thibault). "De la déraisonnable efficacité des digrammes", *Colloque autour de Gilles Châtelet du 27-29 juin 2001,* (à paraître).

[95] DARRIGOL (Olivier). "Elements of a scientific biography of Tomonaga Sinitiro", *Historia Scientiarum,* 35 (1988) 1-29.

[96] DELEUZE (Gilles). *Différence et répétition*, Paris : Presses Universitaires de France (1968).

[97] DELEUZE (Gilles). *Logique du sens*, Paris : Minuit (1969).

[98] DELEUZE (Gilles). *Foucault*, Paris : Minuit (1986).

[99] DELEUZE (Gilles). *Le Pli. Leibniz et le baroque,* Paris : Minuit (1988).

[100] DELEUZE (Gilles). GUATTARI (Félix). *Mille plateaux, Capitalisme et schizophrénie* 2, Paris : Minuit (1980).

[101] DELEUZE (Gilles). GUATTARI (Félix). *Qu'est-ce que la philosophie ?*, Paris : Minuit (1991).

[102] DERRIDA (Jacques). "Introduction", in E. Husserl, *L'Origine de la géométrie,* Traduction française de J. Derrida, Paris : Presses Universitaires de France (1962).

[103] DERRIDA (Jacques). *Marges de la philosophie*, Paris : Minuit (1972).

[104] DERRIDA (Jacques). *Positions*, Paris : Minuit (1972).

[105] DESCARTES (René). *Médiations métaphysiques*, Paris : Presses Universitaires de France (1988).

[106] DESANTI (Jean-Toussaint). *La philosophie silencieuse ou critique de la philosophie de la science,* Paris : Seuil (1975).

[107] DESANTI (Jean-Toussaint). *Les idéalités mathématiques : recherches épistémologiques sur le développement de la théorie des fonctions de variables réelles*, Paris : Seuil (1989).

[108] DESANTI (Jean-Toussaint). *Variations philosophiques I. Réflexions sur le temps.* Paris : Grasset (1992).

[109] DESANTI (Jean-Toussaint). *Variations philosophiques II. Philosophie : un rêve de flambeur.* Paris : Grasset (1999).

[110] DIRAC (P.A.M.), FOCK (V.A.), PODOLSKY (B.). "On quantum electrodynamics", *Physical Zeitschrift der Sowjetunion* 2 (1932) 468-479.

[111] DUCHESNEAU (François). *Leibniz et la méthode de la science*, Paris : Seuil (1993).

[112] DUHEM (Pierre). *La théorie physique. Son objet, sa structure,* Paris : Vrin, 2e édition (1989).

[113] DUNS SCOT. *Le principe d'individuation,* traduction, introduction et notes de G. Sondag, Paris : Vrin (1992).

[114] DUVERNEY (Claude). *Le critère de subsomption. L'application des catégories kantiennes*, Genève : Slatkine (1994).

[115] DYSON (Freeman). "The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman", *Physical Review* 75 (1949) 486-502.

[116] DYSON (Freeman). "The S-matrix in Quantum Electrodynamics", *Physical Review* 75 (1949) 1736-1755.

[117] EFIMOV (Nicolas). *Géométrie supérieure*, Moscou : Mir (1981).

[118] EILENBERG (Samuel), MAC LANE (Saunders). "Natural Isomorphisms in Group Theory", *Proc. Nat. Acad. Sci.* 28 (1942), 537-543.

[119] ELBAZ (Edgar), CASTEL (Boris). *Graphical methods of spin algebras in atomic, nuclear and particle physics*, New York : Dekker (1972).

[120] ELBAZ (Edgar). *Algèbre de Racah et analyse vectorielle graphique*, Paris : Ellipses (1985).

[121] Feynman (Richard Phillips). "Space-time approach to quantum electrodynamics", *Physical Review* 76 (1949) 769-789.

[122] Feynman (Richard Phillips). "The theory of positrons", *Physical Review* 76 (1949) 749-759.

[123] Feynman (Richard Phillips). *Lumière et matière*, trad. par Françoise Balibar et Alain Laverne (*QED : the strange theory of light and matter*), Paris : Interéditions (1987).

[124] Feynman (Richard Phillips). *La nature de la physique*, trad. par Hélène Isaac, Jean-Marc Lévy-Leblond et Françoise Balibar, Paris : Seuil (1980).

[125] Flament (Dominique), Kouneiher (Joseph), Nabonnand (Philippe), Szczeciniarz (Jean-Jacques, éds.). *Géométrie au XXe siècle, Histoire et horizons*, Paris : Hermann (2005).

[126] Foucault (Michel). *Les mots et les choses*, Paris : Gallimard (1966).

[127] Foucault (Michel). *L'archéologie du savoir*, Paris : Gallimard (1969).

[128] Foucault (Michel). *Surveiller et punir. Naissance de la prison*, Paris : Gallimard (1975).

[129] Frege (Gottlob). *Ecrits logiques et philosophiques*, trad. et introd. de Claude Imbert, Paris : Seuil (1994).

[130] Frege (Gottlob). *Les fondements de l'arithmétique : recherche logico-mathématique sur le concept de nombre*, Paris : Seuil (1995).

[131] Freyd (Peter), Scedrov (Andrej). *Categories, allegories*, North-Holland (1990).

[132] Gardner (Martin). *Logic, machines and diagrams.* New-York : McGraw Hill (1958).

[133] Gérard (Vincent). "La mathesis universalis est-elle l'ontologie formelle ?", *Annales de phénoménologie,* (2002) 49-90

[134] Gilson (Etienne). *L'Être et l'essence*, Paris : Vrin (1972).

[135] Gilson (Etienne). *Constantes philosophiques de l'être*, Paris : Vrin (1983).

[136] Gilson (Lucie). *Méthode et métaphysique chez Franz Brentano*, Paris : Vrin (1955).

[137] Girard (Jean-Yves). *Proof theory and logical complexity*, Bibliopolis (1987).

[138] Girard (Jean-Yves), Lafont (Yves), Taylor (Paul). *Proofs and Types.* Cambridge University Press (1989).

[139] Giraud (Jean). "Classifying topos", in *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, (ed. FW Lawvere), Springer, *Lecture Notes in Mathematics* 274 (1972) 43-56.

[140] Goldblatt (Robert). *Topoi, the Categorical Analysis of Logic*, New York : North Holland, 2e édition, (1984).

[141] Granger (Gilles-Gaston). *Essai d'une philosophie du style*, Paris : Odile Jacob (1988).

[142] Granger (Gilles-Gaston). *Formes, opérations, objets*, Paris : Vrin (1994).

[143] Greaves (Mark). *The Philosophical status of diagrams*, Stanford : CSLI Publications (2002).

[144] Grellard (Christophe, éd.) *Méthodes et statut des sciences à la fin du Moyen-Âge*, Lille, Presses Universitaires du Septentrion (2004).

[145] Grothendieck (Alexandre). "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohoku Mathematical Journal* 9 (1957) 119-221.

[146] Grothendieck (Alexandre). *Esquisse d'un programme*, manuscrit non publié (1984).

[147] Grothendieck (Alexandre). *Récoltes et semailles : réflexions sur un passé de mathématicien*, non publié (1985), disponible à http ://www.math.jussieu.fr/~leila/mathtexts.php.

[148] Grothendieck (Alexandre). *Les Dérivateurs*, Texte édité par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis, disponible à http ://www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.

[149] Grothendieck (Alexandre). *Séminaire de géométrie algébrique Du BoisMarie, 7 vol.* (1960-1969), disponible à http ://modular.fas.harvard.edu/sga/index.html.

[150] Guattari (Félix). *Chaosmose*, Paris : Galillée (1992).

[151] Guitart (René). *Logiques, relations et structures dans les catgéories,* Thèse de doctorat d'Etat, Université de Picardie, Amiens 2 vol. (1979).

[152] Guitart (René). "Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?", *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*, XXIII-2 (1982) 115-148.

[153] Guitart (René). *Satellites, esquisses et algorithmes*, Collection d'articles. Volume 3, Articles publiés entre 1980 et 1988, Université de Paris 7 (1988).

[154] Guitart (René). "La courbure de la raison", *Les conférences du perroquet*, 31 (1991) 3-41.

[155] Guitart (René). *La pulsation mathématique ; Rigueur et ambiguité. La nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire*, Paris : L'Harmattan (1999).

[156] Guitart (René). *Evidence et étrangeté. Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud*, Paris : Presses Universitaires de France (2000).

[157] Guitart (René). “Toute théorie est algébrique”, *Journée mathématique en l'honneur d'Albert Burroni : Catégories, théories algébriques et informatique*, le Vendredi 20 septembre 2002, à l'Université Paris 7, Institut de mathématique de Jussieu, Prépublication 368, Avril 2004, p. 79-102.

[158] Guitart (René). “Charles Ehresmann, au carrefour des structures locales et algébriques”, Colloque International “Charles Ehresmann : 100 ans”, Amiens 7–9 octobre 2005, in *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, XLVI–3 (2005) 172–175.

[159] Hallward (Peter). *Badiou, a subject to truth,* University of Minnesota Press (2003).

[160] Hallward (Peter, éd.). *Think again : Alain Badiou and the future of philosophy,* Continuum International Publishing Group (2004).

[161] Hammer (Eric). *Logic and Visual Information*, Stanford : CSLI Publications (1995).

[162] Harel (David). “On Visual Formalism”, *Communications of the ACM*, 31-5 (1988) 514-530.

[163] Hartmann (Eduard von). *Kategorienlehre,* Leipzig : H. Haacke (1896).

[164] Hegarty (Mary), Meyer (Bernd), Narayanan (Hari, eds.), *Diagrammatic Representation and Inference*, Proceedings of the Second International Conference, Diagrams 2002, Callaway Gardens, USA, Springer, 2002.

[165] Hegel (Georg Wilhelm Friedrich). *La phénoménologie de l'esprit,* trad. Hyppolite. Paris : Aubier (1939).

[166] Hegel (Georg Wilhelm Friedrich). *Science de la logique*, trad. Bernard Bourgeois, Paris : Vrin (1986).

[167] Heidegger (Martin). *Traité des catégories et de la signification chez Duns Scot*, trad. par Florent Gaboriau, Paris : Gallimard (1970).

[168] Herreman (Alain). *La topologie et ses signes. Éléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*, Paris : L'Harmattan (2000).

[169] Hilbert (David). *Grundlagen der Geometrie.* Stuttgart : Teubner, 1956. Traduction française de Paul Rossier *Les fondements de la géométrie.* Paris : J. Gabay (1997).

[170] Howse (John), Molina (Fernando), Shin (Sun-Joo), Taylor (John), “On Diagrams Tokens and Types” in Mary Hegarty et al. *Diagrammatic Representation and Inference*, Springer (2002) 146-160.

[171] Johnstone (Peter). *Topos theory*, New-York : Academic Press (1977).

[172] Jucys (A.P.), Levinson (I.B.), Vanagas (V.V.). *Mathematical apparatus of the theory of angular momentum*, Vilnius, Institute for Physics and Mathematics of the Academy of Science of Lithuanian SSR, (en lithuanien), (1960). Traduction anglaise, Jerusalem, Israel Program of Scientific Translations (1962). [Le cyrillique *Jucys* est transcrit *Yutsis*].

[173] Kaiser (David). *Drawing theories apart. The dispersion of Feynman diagrams in postwar physics.* Chicago : University of Chicago Press (2005).

[174] Kant (Emmanuel). *Critique de la raison pure*, trad. J. Barni, Paris : Garnier Flammarion (1976).

[175] Klein (Etienne). *Etudes sur la question de l'unité en physique : fondement, histoire, perspectives de la démarche unificatrice*, Thèse Université de Paris 7 (2000).

[176] Knoespel (Kenneth). “Diagrams as Piloting Devices in the Philosophy of Gilles Deleuze”, *Théorie, Littérature, Enseignement*, Presses Universitaires de Vincennes, 19 (2001) 145-165.

[177] Knoespel (Kenneth). “Diagrammes, matérialité et cognition”, *Théorie, Littérature, Enseignement*, Presses Universitaires de Vincennes, 22 (2004) 143-163.

[178] Kontsevich (Maxime). “Feynman diagrams and low-dimensional topology”, *First european congress of mathematics* II, Basel : Birkhäuser (1994), 97-121.

[179] Kuratowski (Kasimir). “Sur la notion d'ensemble fini”, *Fundamenta Mathematicae*, 1 (1920) 130-131.

[180] Kreimer (Dirk). *Knots and Feynman diagrams*, Cambridge University Press (2000).

[181] Krömer (Ralf). *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory*, Birkhäuser (2007).

[182] Kuhn (Thomas), *La révolution copernicienne*, Paris : Fayard (1973).

[183] Lachièze-Rey (Marc). *Au-delà de l'espace et du temps. La nouvelle physique*, Paris : Le Pommier (2004).

[184] Lachièze-Rey (Marc, éd.). *L'espace physique, entre mathématiques et philosophie*, Paris : EDP Sciences (2005).

[185] Lachièze-Rey (Marc), Szczeciniarz (Jean-Jacques). "Tenseurs, spineurs, twisters : présentation des diagrammes de Penrose", texte prononcé au Séminaire Riemann, ENS Ulm, 1er décembre 2006.

[186] Lakatos (Imre). *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, traduction de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde, Paris : Hermann (1984).

[187] Largeault (Jean). *Systèmes de la nature*, Paris : Vrin (1985).

[188] Largeault (Jean, éd.) *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin (1992).

[189] Lask (Emil). *La logique de la philosophie et la doctrine des catégories*, trad. de l'allemand par Jean-François Courtine *et al.* Paris : Vrin (2002).

[190] Lautmann (Albert). *Symétrie et dissymétrie. Le problème du temps,* Paris, Hermann (1946).

[191] Lautmann (Albert). *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Paris, UGE (1977).

[192] Lautmann (Albert). *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Paris, Vrin (2007).

[193] Lawvere (Francis William). "An elementary theory of the category of sets", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 52 (1964) 1506-1511.

[194] Lawvere (Francis William). "The category of categories as a foundation for mathematics", *Proc. La Jolla Conference on Categorical Algebra*, Springer (1966) 1-20.

[195] Lawvere (Francis William). "Introduction : Toposes, alegbraic geometry and logic", in *Toposes,Algebraic Geometry and Logic*, (ed. FW Lawvere), Springer, *Lecture Notes in Mathematics*, 214 (1972) 1-12.

[196] Lawvere (Francis William), Schanuel (Stephen). *Conceptual mathematics,* Cambridge University Press (1991).

[197] Laz (Jacques). *Bolzano, critique de Kant*, Paris : Vrin (1993).

[198] Lecourt (Dominique). *Pour une critique de l'épistémologie : Bachelard, Canguilhem, Foucault*, Paris : Maspero (1978).

[199] Lecourt (Dominique). *Le déclin de la philosophie analytique*, Paris : Presses Universitaires de France (1999).

[200] Lecourt (Dominique). *L'Épistémologie historique de Gaston Bachelard*, Paris : Vrin (11e édition, 2002).

[201] Lefebvre (Muriel). "Construction et déconstruction des diagrammes de Dynkin", *Actes de la recherche en sciences sociales,* 141-142 (2002) 121-124.

[202] Leibniz (Gottfried Wilhelm). *L'Être et la relation, avec trente-sept lettres de Leibniz au R.P. Des Bosses*, trad. du latin et annotées par Christiane Frémont, préf. de Michel Serres, Paris : Vrin (1999).

[203] Leibniz (Gottfried Wilhelm). *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Paris : Flammarion (1996).

[204] Leray (Jean). "Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations", *J. Math. Pures Appl.*, 24 (1945) 95-167.

[205] Lewis (David). *The plurality of worlds*, Malden : Blackwell (Première édition 1986, 2000).

[206] Libéra (Alain de). *La querelle des universaux. De Platon à la fin du Moyen Age.* Paris : Le Seuil (1996).

[207] Libéra (Alain de). *L'art des généralités. Théories de l'abstraction*, Paris : Aubier (1999).

[208] Libéra (Alain de). *La référence vide. Théories de la proposition*, Paris : Presses Universitaires de France (2002).

[209] Longo (Giuseppe). "Reflections on Incompleteness", *Lecture Notes in Computer Science*, vol 2277 (Callaghan et al. eds), Springer, (2002) 160-180.

[210] Longo (Giuseppe). "Espace, temps et fondements : Les mathématiques au défi des autres sciences", *Intellectica* (2003) 36-37.

[211] Longo (Giuseppe). "Mathematical Concepts and Physical Objects", in *Rediscovering phenomenology,* (L. Boi, P. Kerszberg, F. Patras eds.), Springer, (2007). (Cet article est le premier chapitre de Francis Bailly, Giuseppe Longo, *Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant*, Hermann, Paris, 2006)

[212] Lukács (Georg). *The Ontology of Social Being*, traduction anglaise de *Zur Ontologie des gesellschaftlichen Seins,* London : Merlin (1982).

[213] Luengo (Isabel). "A Diagrammatic Subsystem of Hilbert's Geometry" in *Logical Reasoning with Diagrams,* Gérard Allwein and Jon Barwise, eds. New York : Oxford University Press (1996).

[214] Lulle (Raymond). *L'art bref*, trad., introd. et notes par Armand Llinarès, Paris : Editions du Cerf (1991).

[215] Lulle (Raymond). *Arbre des exemples*, Genève : Champion (1986).

[216] MacLane (Saunders). *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Second edition, 1998.

[217] MacLane (Saunders). *A Mathematical Autobiography,* A.K. Peters (2005).

[218] MacLane (Saunders), Moerdijk (Ieke). *Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory*, Springer (1991).

[219] Majolino (Claude). "De la grammaire à l'ontologie et retour. Le rapport entre catégories de l'être et grammaire philosophique de Trendelenburg et Marty", *Aristote au XIX^e^ siècle*, édité par Denis Thouard (2006) 81-104.

[220] Malherbe (Michel). "Bacon, Diderot et l'ordre encyclopédique", *Revue de Synthèse*, 1-2 (1994) 13-37.

[221] Malherbe (Michel), Pousseur (Jean-Marie, eds.) *Bacon Francis : Science et méthode*, Actes du colloque de Nantes, Paris : Vrin (1985).

[222] Martin (Jean-Clet). *Variations. La philosophie de Gilles Deleuze,* Paris : Payot (1993).

[223] Matthews (Paul), Salam (Abdus). "Renormalization", *Review of Modern Physics* 23 (1951) 311-314.

[224] Meillassoux (Quentin). *Après la finitude. Essai sur la nécessité de la contingence*, Paris : Le Seuil (2006).

[225] Meinong (Alexius). *Théorie de l'objet*, trad. de l'allemand par Jean-François Courtine et Marc de Launay, Paris : Vrin (1999).

[226] Mengue (Philippe). *Deleuze ou le système du multiple,* Paris : Kimé (1994).

[227] Merker (Joël). "Penrose ou l'apothéose du platonisme", *Revue de l'HPMP* (1998), 21–26.

[228] Miller (Nathaniel Gregory). *A Diagrammatic Formal System for Euclidean Geometry*, Ph. D. Dissertation, Cornell University, 2001.

[229] Mitchell (William). "Boolean topoi and the theory of sets", *J. Pure Appl. Alg.*, 2 (1972) 261-274.

[230] Monnoyer (Jean-Maurice, éd.) *La structure du monde. Objets, propriétés, états de choses. Renouveau de la métaphysique dans l'école australienne de philosophie*, Paris : Vrin (2004).

[231] Narboux (Jean-Philippe). "Diagramme, dimensions et synopsis", *Théorie, Littérature, Enseignement*, Presses Universitaires de Vincennes, 22 (2004) 115-141.

[232] Nef (Frédéric). *L'objet quelconque, Recherches sur l'ontologie de l'objet*, Paris : Vrin (1998).

[233] Nef (Frédéric). *Qu'est ce que la métaphysique ?* Paris : Flammarion (2004).

[234] Nef (Frédéric). *Les propriétés des choses. Expérience et logique.* Paris : Vrin (2006).

[235] Norguet (François), Ofman (Salomon), Szczeciniarz (Jean-Jacques) eds. *Géométrie complexe*, 2 vol. Paris : Hermann (2006).

[236] Ocneanu (Adrian). *Paths on Coxeter Diagrams : From Platonic Solids and Singularities to Minimal Models and Subfactors,* Notes prises par S. Goto, Editées par B.V. Rajarama Bhat, George A. Elliott, Peter A. Fillmore, AMS Fields Institute Monographs 13 (1999).

[237] Ocneanu (Adrian). "The classification of subgroups of quantum SU(N)", in Robert Coquereaux, Ariel Garcia et Roberto Trinchero eds.*Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics*, Proceedings of the Bariloche School, Januеary 10-21, 2000, Argentina, American Mathematical Society, (2002) 133-159.

[238] Oresme (Nicolas) "Traité des configurations des qualités et des formes", extraits traduits par Pierre Souffrin et Jean-Pierre Weiss in *Nicole Orseme. Tradition et innovation chez un intellectuel du XIVe siècle*, Paris : Les Belles Lettres (1988) 125-144.

[239] Pacotte (Julien). *Le réseau arborescent, schème primordial de la pensée*, Paris : Hermann (1936).

[240] Panaccio (Claude). *Les mots, les concepts et les choses. La sémantique de Guillaume d'Occam et le nominalisme aujourd'hui*, Bellarmin, Vrin (1991).

[241] Parrochia (Daniel). *Mathématiques et existence*, Seyssel : Champ Vallon (1991).

[242] PATRAS (Frédéric). *La pensée mathématique contemporaine*, Presses Universitaires de France (2001).

[243] PENROSE (Roger), RINDLER (Wolfgang). *Spinors and space time*, 2 vol., Cambridge University Press (1984).

[244] PENROSE (Roger). *Applications of negative dimensional tensor in combinatorial mathematics and its applications*, ed. D.J.A. Welch, Academic Press (1971).

[245] PENROSE (Roger). *The Emperor's New Mind. Concerning computers, minds, and the laws of physics,* Oxford University Press, traduction française *L'Esprit, l'ordinateur et les lois de la physique,* Paris : Interéditions (1992).

[246] PEIRCE (Charles Sanders). *Collected Papers,* 8 vols. édités par Charles Hartshorne et Paul Weiss, Cambridge University Press (1931).

[247] PEIRCE (Charles Sanders). *Ecrits sur le signe*, trad. Gérard Deledalle, Paris : Seuil (1978).

[248] PETITOT (Jean). *Morphogenèse du sens*, Paris : Presses Universitaires de France (1985).

[249] PIAGET (Jean), HENRIQUES (Gil), ASCHER (Edgar). *Morphismes et catégories, comparer et transformer*, Paris : Delachaux-Niestlé (1990).

[250] POLI (Roberto), SIMONS (Peter, eds.). *Formal ontology,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996).

[251] PONCELET (Jean-Victor). *Traité des propriétés projectives des figures, Ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain.* Paris : J. Gabay (1995).

[252] QUILLET (Jeannine, éd.) *Autour de Nicole Oresme*, Paris : Vrin (1990).

[253] QUINE (Willard Van Orman). *Le mot et la chose*, trad. par Joseph Dopp et Paul Gochet, Flammarion (1999).

[254] QUINE (Willard Van Orman). *Relativité de l'ontologie et quelques autres essais*, trad. par Jean Largeault, Paris : Aubier (1977).

[255] RACAH (Giulio). *Ergebnisse der exacten Naturwissenschaften*, édité par G. Höhler, Springer (1965).

[256] RAMOND (Charles, éd.). *Alain Badiou : penser le multiple,* Actes du colloque de Bordeaux 1999, Paris : L'Harmattan (2002).

[257] ROBERTS (Don). *The Existential Graphs of Charles S. Pierce*, The Hague : Mouton (1973).

[258] ROSSI (Paolo). *Clavis universalis*, Grenoble : Jérôme Millon (1993).

[259] RUSSEL (Bertrand), WHITEHEAD (A.N.). *Principia matheématica,* Cambridge University Press (5e édition, 1960).

[260] SAINT-OURS (Alexis de). "Les sourires de l'Être", *Théorie, Littérature, Enseignement*, Presses Universitaires de Vincennes, 22 (2004) 29-53.

[261] SALAM (Abdus). "Overlapping divergence and the *S*-matrix", *Physical Review* 82 (1951) 217-227.

[262] SALAM (Abdus). "Divergent integrals in renormalizable field theories", *Physical Review* 84 (1951) 426-431.

[263] SALANSKIS (Jean-Michel), PANZA (Marco), eds. *L'objectivité mathématique : platonismes et structures formelles*, Paris : Masson (1995).

[264] SALANSKIS (Jean-Michel). *Herméneutique et cognition*, Lille : Presses Universitaires du Septentrion (2003).

[265] SALLANTIN (Jean), SZCZECINIARZ (Jean-Jacques), *Le Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Paris : Presses Universitaires de France (1999).

[266] SARTRE (Jean-Paul). *L'être et le néant. Essai d'ontologie phénoménologique.* Paris : Gallimard (1976).

[267] SCHAPIRA (Pierre), KASHIWARA (Masaki). *Categories and Sheaves*, Springer (2005).

[268] SCHNEPS (Leila), LOCHAK (Pierre, éd.) *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, Cambridge University Press (1994).

[269] SCHWEBER (Silvan). *QED and the Men Who Made It : Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga*, Princeton University Press (1994).

[270] SCHWINGER (Julian). "Quantum electrodynamics I : A covariant formulation", *Physical Review* 74 (1948) 1439.

[271] SCHWINGER (Julian). "Quantum electrodynamics II : Vacuum polarization and self energy", *Physical Review* 75 (1949) 651-679.

[272] SCHWINGER (Julian). "Quantum electrodynamics III : The electrodynamics properties of the electron-radiative corrections to scattering", *Physical Review* 76 (1949) 790-817.

[273] SCHWINGER (Julian). "On radiative corrections to electron scattering", *Physical Review* 75 (1948) 898-899.

[274] SCHWINGER (Julian). "On the classical radiation of accerated electrons", *Physical Review* 75 (1949) 898-899.

[275] SCHWINGER (Julian). "On gauge invariance and vaccum polarization", *Physical Review* 82 (1949) 664-679.

[276] SERRES (Michel). *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France (1968).

[277] SHIN (Sun-Joo). *The Logical Status of Diagrams.* New-York, Cambridge University Press (1994).

[278] SHIN (Sun-Joo). "Reviving the Iconicity of Beta Graphs" in M. Anderson, P. Cheng, V. Haarslev (Eds.) *Theory and Applications of Diagrams*, Springer (2000) 58-73.

[279] SHIRKOV (Dimitri). "Historical Remarks on the Renormalization Group" in *Renormalization from Lorentz to Landau (and Beyond)* ed. Laurie M Brown, Springer-Verlag (1994) 167-186.

[280] SIMONS (Peter). *Parts : a study in ontology*, Oxford : Clarendon Press (1987).

[281] SLOTERDIJK (Peter). *La domestication de l'Être*, Paris : Editions des Mille et une nuits (2000).

[282] SLOTERDIJK (Peter). *Sphères*, 3 vol., Paris : Hachette (2003).

[283] SMITH (Barry, éd.) *Parts and Moments. Studies in logic and formal ontology*, München : Philosophia Verlag (1982).

[284] SMITH (Barry). *On the origin of objects*, Cambridge : MIT Press (1996).

[285] STEDMAN (Geoffrey). *Diagram techniques in group theory*, Cambridge University Press (1990).

[286] SOWA (John). *Knowledge representation : Logical, philosophical, and computational foundations*, Brooks Cole Publishing Co. (2000).

[287] SPRONSEN (Johannes Willem van). *The periodic system of chemical elements : a history of the first hundred years*, Amsterdam : Elsevier (1969).

[288] STRAWSON (Peter Frederick). *Individuals. An Essay in Descriptive Metaphysics*, London : Methuen (1959), traduction française de A. Shalom et P. Drong, *Les Individus*, Paris : Seuil (1959).

[289] STÜCKELBERG (Ernst. C. G.). "Remarque à propos des temps multiples dans la théorie d'interaction des charges entre elles", *Comptes rendus SPHN,* Genève 52 (1935) 98-101.

[290] STÜCKELBERG (Ernst. C. G.). "Remarque sur la production de paires d'électron", *Helvetica Physica Acta* 8 (1935) 325-326.

[291] STÜCKELBERG (Ernst. C. G.). "La signification du temps propre en mécanique ondulatoire", *Helvetica Physica Acta* 14 (1941) 321-322.

[292] STÜCKELBERG (Ernst. C. G.). "Remarque à propos de la création de paires de particules en théorie de relativité", *Helvetica Physica Acta* 14 (1941) 588-594.

[293] STÜCKELBERG (Ernst. C. G.). "La mécanique du point matériel en théorie de la relativité et en théorie des quanta", *Helvetica Physica Acta* 15 (1942) 23-37.

[294] STÜCKELBERG (Ernst. C. G.), PELERMANN (A.), "The normalisation group in quantum theory", *Helvetica Physica Acta*, 24 (1951) 317-319.

[295] SZCZECINIARZ (Jean-Jacques). *Copernic et le mouvement de la Terre,* Paris : Flammarion (1998).

[296] SZCZECINIARZ (Jean-Jacques). "Sur la transformation de Penrose", in *Epistémologique*, Numéro spécial, coordination avec Jean Seidengart, Cosmologie et philosophie. Hommage à J. Merleau-Ponty, (2000).

[297] SZCZECINIARZ (Jean-Jacques). "L'être ou la structure (faire l'ontologie, est-ce dire que les mathématiques sans l'opératoire qui les fait exister ? Est-ce produire la contemplation des objets ?)" in *Alain Badiou, Penser le multiple*, édité par Charles Ramond, Paris : L'Harmattan (2002) 107-147.

[298] SZCZECINIARZ (Jean-Jacques). *La Terre immobile : Aristote, Ptolémée, Husserl,* Paris : Presses Universitaires de France (2003).

[299] Szczeciniarz (Jean-Jacques). “Les Catégories comme mode de réflexion spécifique des Mathématiques sur elles-mêmes” Texte prononcé au séminaire *Les Catégories*, ENS Ulm, le 10 octobre 2005.

[300] Szczeciniarz (Jean-Jacques). “Espaces mathématiques, espaces philosophiques”, in Marc Lachièze-Rey, *L'espace physique, entre mathématiques et philosophie*, (2005) 205-224.

[301] Szczeciniarz (Jean-Jacques). “Réflexions métaphysique sur la périodicité” in *Epistémologie des systèmes dynamiques*, Hermann, (2007).

[302] Tarby (Fabien). *La philosophie d'Alain Badiou,* Paris : L'Harmattan (2005).

[303] Tarby (Fabien). *Matérialismes d'aujourd'hui. De Deleuze à Badiou*, Paris : L'Harmattan (2005).

[304] Tassy (Pascal). *L'arbre à remonter le temps*, Paris : Christian Bourgois (1991).

[305] T'Hooft (Gerard), Veltman (Martinus). *Diagrammar*, Genève : Rapport CERN, Preprint 73-9, (1973).

[306] Thom (René). *Stabilité structurelle et morphogenèse*, Paris : Ediscience (1972).

[307] Thom (René). *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Paris : Bourgois (1980).

[308] Thouard (Denis, ed.). *Aristote au XIX$^e$ siècle.* Lille : Presses Universitaires du Septentrion (2006).

[309] Thouard (Denis). “Une métacritique des catégories : l'usage critique d'Aristote chez Trendelenburg”, *Aristote au XIX$^e$ siècle*, édité par Denis Thouard (2006) 37-62.

[310] Tiercelin (Claudine). “Le problème des universaux : Aperçus hisoriques et perspectives contemporaines”, in J.M. Monnoyer, *La structure du monde,* Vrin (2004) 329-353.

[311] Tierney (Miles). “Sheaf theory and the continuum hypothesis”, in *Toposes,Algebraic Geometry and Logic*, (ed. FW Lawvere), Springer, *Lecture Notes in Mathematics* 274 (1972) 13-42.

[312] Tierney (Miles). “Forcing topologies and classifying topoi”, in *Algebra, topology and category theory : a collection of papers in honor of S. Eilenberg* (eds A. Heller et M. Tierney), New-York : Academic Press (1976) 189-219.

[313] Tomonaga (Sinitiro). “Zur Theorie des Mesons”, *Sci. Papers IPCR* 39 (1941) 247-266.

[314] Tomonaga (Sinitiro). “On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields”, *Prog. Theor. Phys.* 1/2 (1946) 1-13.

[315] Tomonaga (Sinitiro). “On infinite reactions in quantum field theory”, *Physical Review*, 74 (1948) 224-225.

[316] Tort (Patrick). *La raison classificatoire*, Paris : Aubier (1989).

[317] Trendelenburg (Friedrich Adolf). *Geschichte der Kategorienlehre*, Berlin : G. Bethge, 1846, (repr. Olms 1979).

[318] Van Frassen (Bas). *The Scientific image*, Oxford : Clarendon Press (1980).

[319] Veltman (Martinus), Goddard (P.), Yeomans (J., eds.) *Diagrammatica the path to Feynman rules*, Cambridge University Press (1994).

[320] Venn (John). *Symbolic logic.* New-York : Chelsea (Première édition 1884, 1972).

[321] Vigo (Alejandro). “Hylémorphisme transcendantal et alétheiologie. La présence d'Aristote dans la théorie des catégories et le jugement de Emil Lask.”, *Aristote au XIX$^e$ siècle*, édité par Denis Thouard (2006) 327-352.

[322] Vistelius (Andrei Borisovich). *Structural diagrams*, New-York : Pergamon Press (1966).

[323] Vuillemin (Jules). *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit (1984).

[324] Vuillemin (Jules). *Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Paris : Presses Universitaires de France (1993).

[325] Vuillemin (Jules). *L'Intuitionnisme kantien*, Paris : Vrin, (1994).

[326] Withehead (Alfred North). *Process and Reality.* Traduction française *Procès et réalité. Essai de cosmologie.* Paris : Gallimard (1995).

[327] Woodhouse (Nicholas). *Geometric Quantization*, Clarendon Press, 1980 (2nd ed. 1992).

[328] Yates (Frances). *Raymond Lulle et Giordano Bruno*, Paris : Presses Universitaires de France (1999).

[329] Young (Greg de). “Diagrams in the Arabic Euclidean tradition : a preliminary assessment”, *Historia Mathematica* 32 (2005) 129–179.

[330] Zabarella (Iacobus). *Tables de logique. Sur* l'Introduction *de Porphyre, les* Catégories*, le* De l'interprétation *et les* Premiers analytiques *d'Aristote. Petite synopse introductive à la logique aristotélicienne.* Traduction de Michel Bastit. Paris : L'Harmattan (2003).

[331] Zalta (Edward). *Intensional logic and the metaphysics of intentionality*, MIT Press (1988).

[332] Zourabichvili (François). *Deleuze, une philosophie de l'événement,* Paris : PUF (1994).

[333] Zourabichvili (François). *Le vocabulaire de Gilles Deleuze,* Paris : Ellipses (2003).

[334] Zvonkin (Alexander), Lando (Sergei), *Graphs on Surfaces and Their Applications,* Springer (2004).

[335] Zvonkin (Alexander), "Cartes et dessins d'enfants"in Berline, Nicole (ed.) et al., *Graphs. Mathematics colloquium X-UPS*, May 17–18, 2004. Palaiseau : Les Éditions de l'École Polytechnique (2004) 53-74.

# Index

# Table des figures

# Table des matières

**Résumé**. En commentant certains résultats des sciences physiques ou mathématiques, plus particulièrement de la seconde moitié du XX$^{e}$ siècle, on cherche à comprendre l'importance philosophique du concept de diagramme, qui est au cœur de la théorie mathématique des catégories, des topoi et des esquisses. Partant du constat que les diagrammes et catégories contraignent à des options ontologiques, on propose pour étudier leur disposition conjointe de suivre quatre concepts fondamentaux qui forment le *quadrilatère épistémique* (la virtualité, la fonctorialité, l'universalité et la dualité). Le virtuel est nécessaire parce qu'une table n'existe pas de la même manière que le bleu du ciel qui n'a pas de réalité matérielle. La fonctorialité et le lemme de Yoneda imposent de reconsidérer le statut de l'objet. Le théorème de Diaconescu illustre l'idée que la logique immanente d'un lieu est déterminée par le topologique, que la logique n'a pas l'importance qu'on lui accorde parfois. L'universalité et la dualité déplace la notion de vérité qui n'est plus une simple valuation, mais une vérité-foudre, une vérité-événement qui fonctionne par adéquation et résonance de pans entiers de connaissance et non plus par inférence logique. Le diagramme devient le lieu de cette vérité qui passe par le geste. Dès lors, il devient possible de croiser ontologie et topologie en une *onto-(po)-logie* (ou une *ontologie toposique*) qui ne soit pas en contraction avec les philosophies de l'immanence. L'univocité de l'Être ne s'oppose pas à l'approche catégorielle. Plus encore : la prégnance des formes duales incite à penser l'hypothèse que *l'Un est le dual de l'Être.*

**Mots clés** : Badiou, Catégories, Châtelet, Deleuze, Diaconescu, Diagrammes, Esquisses, Être, Feynman, Grothendieck, Ontologie, Topos, Un, Vérité, Yoneda.

**Abstract**. Some results of mathematics or physical sciences, more particularly from the second half of the XX$^{e}$ century, lead to a new approach of the philosophical concept of diagram, which is the heart of the mathematical theory of categories, topos and sketches. On the basis of the report that diagrams and categories force with ontological options, their relationship is studied by following four fundamental concepts which form the *epistemic square* (virtuality, fonctoriality, universality and duality). Virtuality is necessary because a table does not exist in the same manner as the blue of the sky which does not have material reality. The fonctoriality and Yoneda's lemma involve to reconsider the statute of object. Diaconescu's theorem shows the idea that the internal logic of a topos is determined by its topology, and sometimes logical investigations are more important than it should be. Universality and duality move the concept of truth. The truth is not a simple valuation, but a "truth-lightning", a "truth-event" which works by adequacy and topological resonance of large sides of knowledge, not any more by logical inference. Diagrams are the place of this truth which goes through gesture. Consequently, it becomes possible to cross ontology and topology in an *onto-(po)-logy* (or a *toposic ontology*) which is not in contraction with French theory. Univocity of the concept of being is not opposed to the categorial approach. More : dual forms encourages to think the assumption that the concept of one is the dual of the concept of being.

**Keywords** : Badiou, Categories, Châtelet, Deleuze, Diaconescu, Diagrams, Sketches, Being, Feynman, Grothendieck, Ontology, Topos, One, Truth, Yoneda.